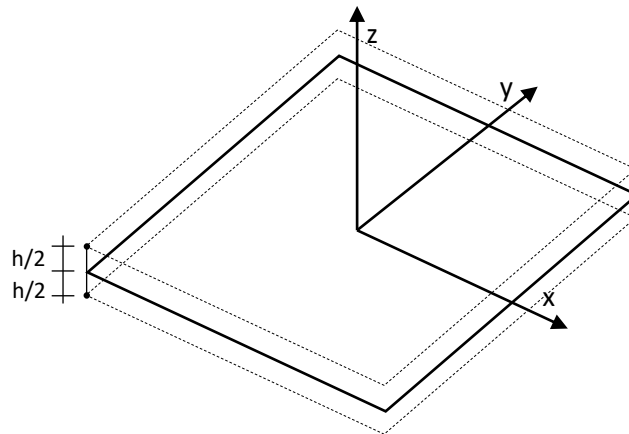


Teoria della piastra

Vettore delle deformazioni

Consideriamo un concio quadrato di piastra (superficie di riferimento) che nel caso di offset nullo coincide con la superficie media.



asse z locale univocamente definito normale
alla superficie
assi x e y locali

Figura 1: concio quadrato di piastra.

Il materiale è disposto lungo la sezione da $z=0+h/2$ a $z=0-h/2$, dove h è lo spessore e o l'offset in questo caso assunto nullo.

Dall'ipotesi cinematica discussa la lezione precedente si ricava il vettore delle deformazioni espresso in funzione del vettore delle deformazioni al piano di riferimento, che è funzione unicamente di x e y , e del vettore delle curvature con legame lineare in z .

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x(x, y, z) \\ \varepsilon_y(x, y, z) \\ \gamma_{xy}(x, y, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_x(x, y) \\ \bar{\varepsilon}_y(x, y) \\ \bar{\gamma}_{xy}(x, y) \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta_y}{\partial x}(x, y) \\ -\frac{\partial \theta_x}{\partial y}(x, y) \\ -\frac{\partial \theta_x}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial \theta_y}{\partial y}(x, y) \end{bmatrix}$$

In particolare:

- $\frac{\partial \theta_y}{\partial x}(x, y, z) = K_x$ curvatura flessionale x
- $-\frac{\partial \theta_x}{\partial y}(x, y, z) = K_y$ curvatura flessionale y
- $-\frac{\partial \theta_x}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial \theta_y}{\partial y}(x, y) = K_{xy}$ curvatura torsionale

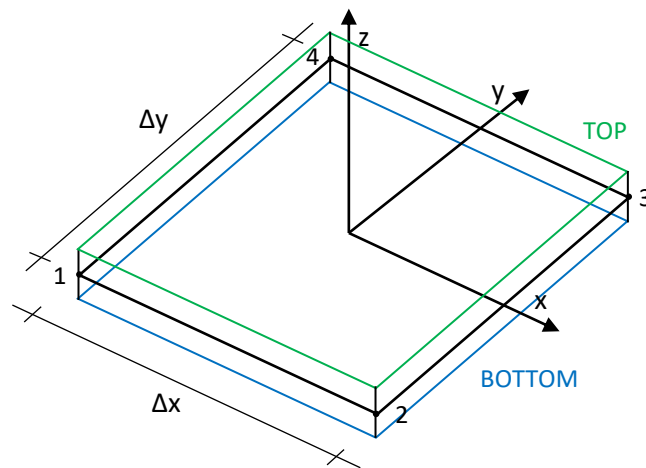


Figura 2: concio di piastra con numerazione dei nodi.

Nel dettaglio in riferimento alla *Figura 2* risulta:

- $K_x > 0$ se $\theta_{y_{2,3}} > \theta_{y_{1,4}}$
- $K_y > 0$ se $\theta_{x_{1,2}} > \theta_{x_{3,4}}$
- $K_{xy} > 0$ se contemporaneamente vale $\frac{\partial \theta_x}{\partial x} < 0$ e $\frac{\partial \theta_y}{\partial y} > 0$ ovvero se $\theta_{x_{2,3}} < \theta_{x_{1,4}}$ e $\theta_{y_{3,4}} > \theta_{y_{1,2}}$

Per poter comprendere graficamente la situazione si assume il caso particolare con rotazioni pari a uno stesso angolo $\pm\alpha$.

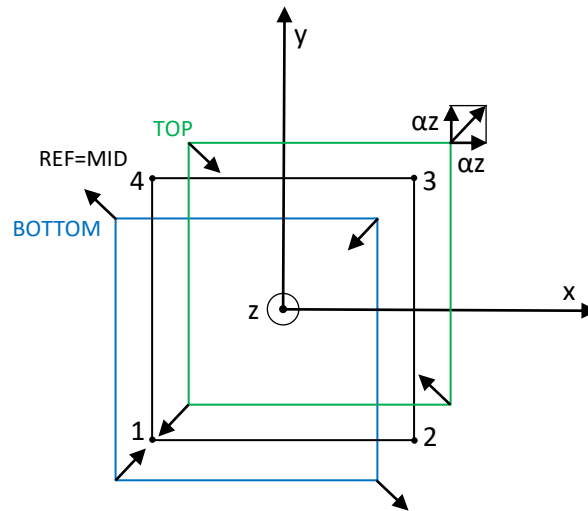


Figura 3: vista in assonometria del concio di piastra.

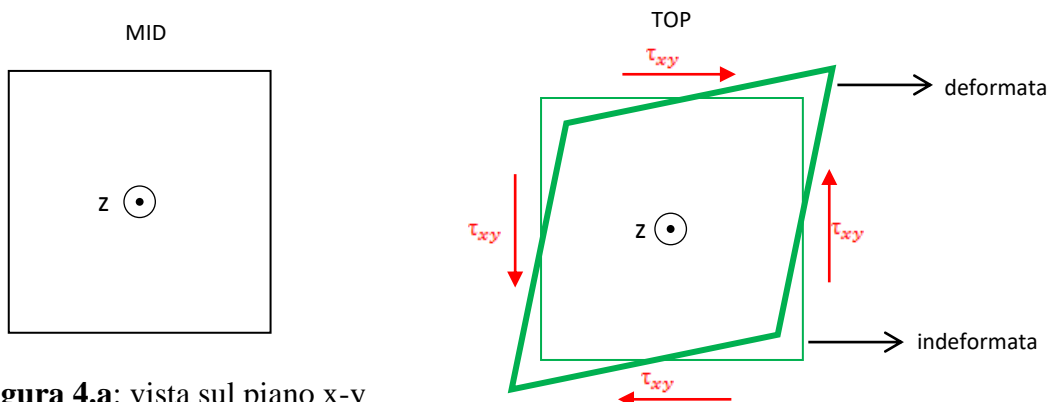


Figura 4.a: vista sul piano x-y del piano medio.

Figura 4.b: vista sul piano x-y dell'indeformata e della deformata del piano top.

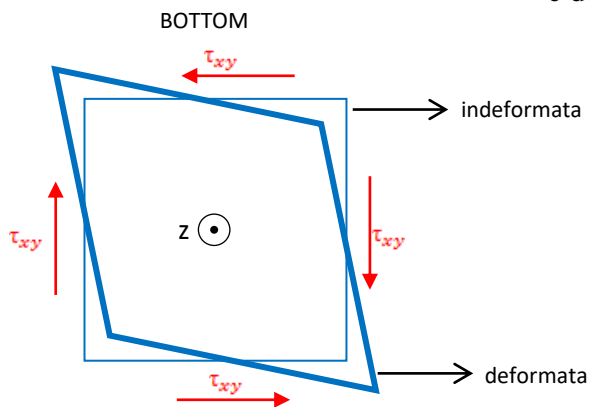


Figura 4.c: vista sul piano x-y dell'indeformata e della deformata del piano bottom.

Il caso analizzato è di deformazione tagliante pura entro piano per la quale risulta:

- al piano top: $\gamma_{xy} = \frac{h}{2} K_{xy}$
- al piano bottom: $\gamma_{xy} = -\frac{h}{2} K_{xy}$

La sollecitazione che genera la deformazione γ_{xy} è:

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy}$$

dove G è il modulo di taglio nel caso di materiale isotropo.

Di seguito viene rappresentata nella *Figura 5* la porzione infinitesima di superficie accentuando lo spessore al fine di visualizzare l'andamento delle τ_{xy} lungo lo stesso.

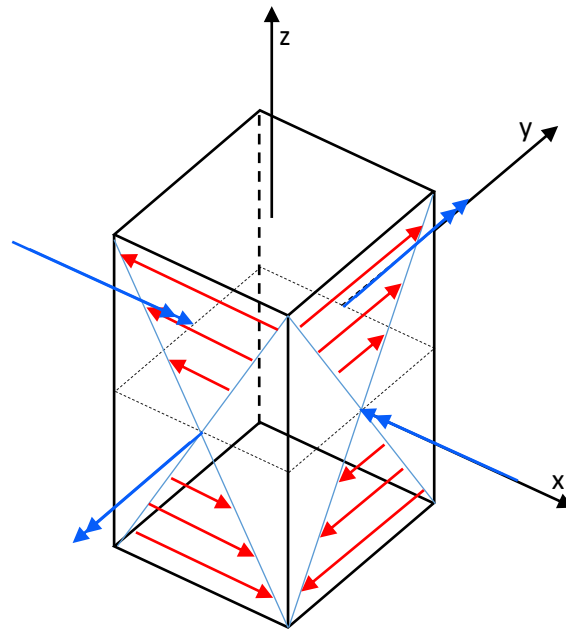


Figura 5: andamento delle τ_{xy} lungo lo spessore.

Nella piastra la condizione di torsione è legata ai momenti torcenti in direzione x e y . Poiché le τ_{xy} su facce opposte dell'elementino infinitesimo sono legate tra loro, su di esse sono presenti momenti torcenti di verso opposto. Si nota inoltre che le tensioni variano linearmente in z e in particolare risultano nulle sul piano medio.

La sollecitazione può essere considerata anche come somma di due sollecitazioni flessionali.

Considerando un quadratino infinitesimo di superficie ruotato di 45° si giunge alla situazione rappresentata di seguito:

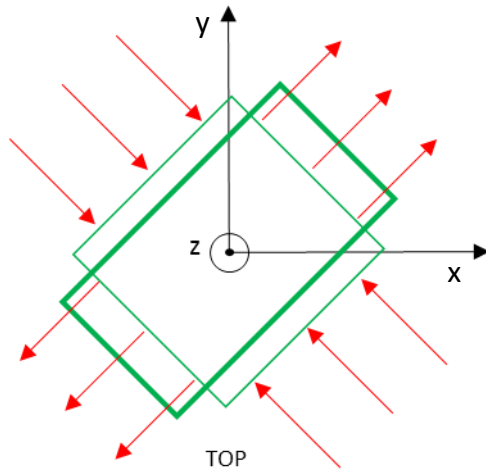


Figura 6.a: vista sul piano x-y dell'indeformata e della deformata del piano top.

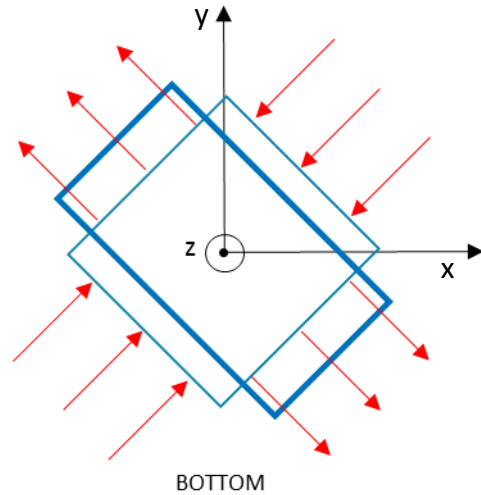


Figura 6.b: vista sul piano x-y dell'indeformata e della deformata del piano bottom.

Si nota che l'elemento deforma con conservazione degli angoli retti senza quindi presentare deformazione tagliante.

In modo analogo a quanto fatto in precedenza si rappresenta la porzione infinitesima di superficie nel sistema di riferimento 3D (x,y,z) evidenziando l'andamento lineare lungo lo spessore dello stato tensionale:

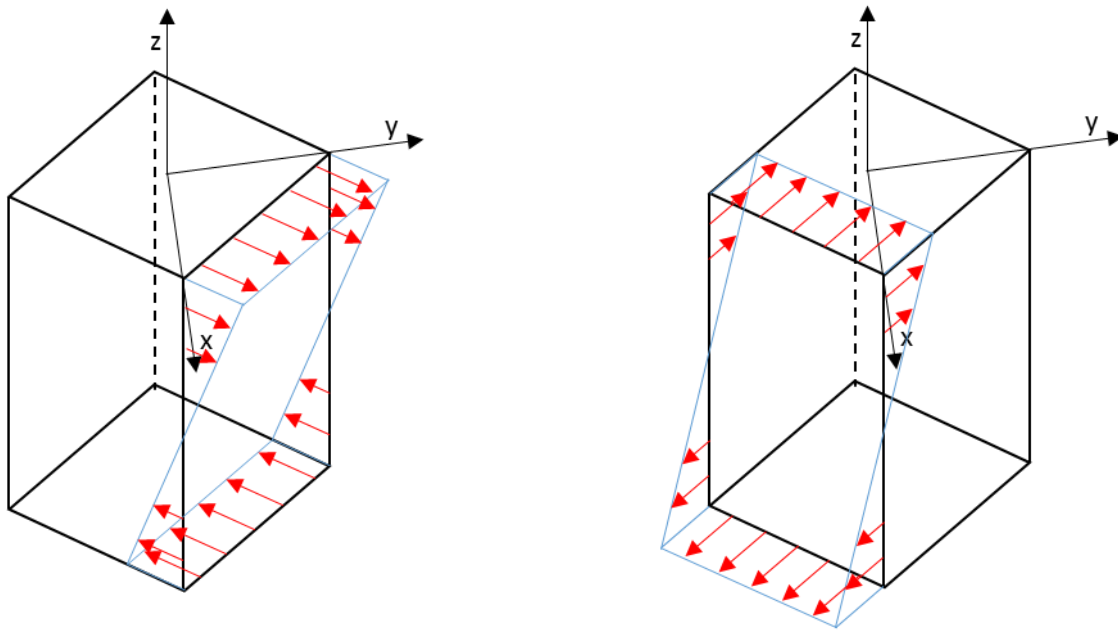


Figura 7: andamento delle sollecitazioni lungo lo spessore.

Lo stato tensionale raffigurato in *Figura 7* può essere considerato generato da momenti con asse entro faccia ovvero di natura flettente come mostrato in *Figura 8*.

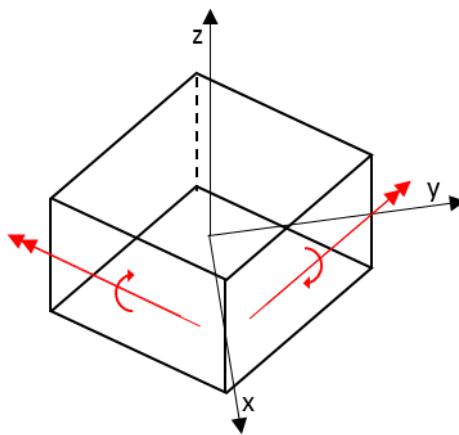


Figura 8: momenti flettenti che generano lo stato tensionale.

Torsione e flessione risultano totalmente dipendenti nella teoria della piastra.

Come già detto nel caso generale risulta:

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\bar{\varepsilon}} + z\underline{K}$$

Con:

- $\underline{\varepsilon}$ = vettore delle deformazioni
- $\underline{\bar{\varepsilon}}$ = vettore delle deformazioni sul piano medio
- \underline{K} = vettore delle curvature

Se:

- $\underline{K} = \mathbf{0}$, ovvero deformazioni costanti in z , si ha deformazione membranale.
Caso di travi in parete sottile soggette a:
 - $M_{f\xi}, M_{f\eta}$
 - N, T_ξ, T_η
 - M_t se sezione chiusa
- $\underline{\bar{\varepsilon}} = \mathbf{0}$ si ha deformazione flessione-torsionale: caso di M_t e sezione aperta.

Alle due componenti di deformazione descritte sono associate componenti di tensione attraverso la matrice di legame costitutivo \underline{D} , che nel caso di tensione piana ($\sigma_z = 0$) per un materiale omogeneo isotropo risulta:

$$\underline{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Per cui si ottiene infine il vettore delle tensioni:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \underline{D} \underline{\bar{\varepsilon}} + z \underline{D} \underline{K}$$

Se:

- il materiale è omogeneo lungo lo spessore, \underline{D} è costante in z allora anche le tensioni variano linearmente lungo lo spessore e il valore massimo è in corrispondenza del top o del bottom

- il materiale non è omogeneo lungo lo spessore, \underline{D} non risulta costante in z pertanto le tensioni risultano essere funzioni lineari sui tratti in cui il materiale è omogeneo.

Caratteristiche di sollecitazione della piastra

In riferimento al concio di piastra infinitesimo si individuano:

- Sollecitazioni membranali (3 componenti equivalenti dello sforzo normale e dei 2 tagli relativamente alla teoria della trave)

Considerando le sollecitazioni σ_x si ha:

$$\iint_a \sigma_x \partial a = \Delta y \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x dz = q_x \Delta y$$

Da cui si ricava il flusso di sforzo in direzione x: $q_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x dz$

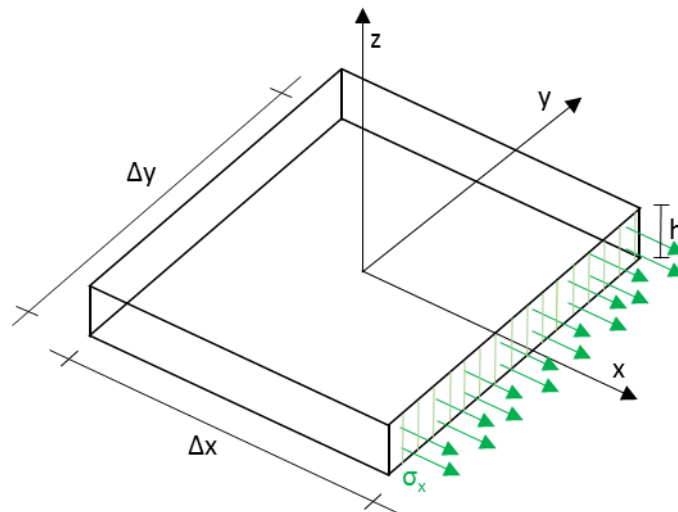


Figura 9: concio di piastra soggetto alle tensioni σ_x

Analogamente si ottengono:

- flusso di sforzo in direzione y: $q_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y dz$
- flusso di sforzo tagliante entro piano: $q_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} dz$

- Sollecitazioni flesso-torsionali (flussi di momento)
 - Momento risultante delle tensioni σ_x rispetto alla retta di intersezione tra faccia e piano medio del quadratino infinitesimo: $m_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz$
 - Momento risultante delle tensioni σ_y rispetto alla retta di intersezione tra faccia e piano medio del quadratino infinitesimo: $m_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z dz$
 - Momento misto torsionale: $m_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} z dz$

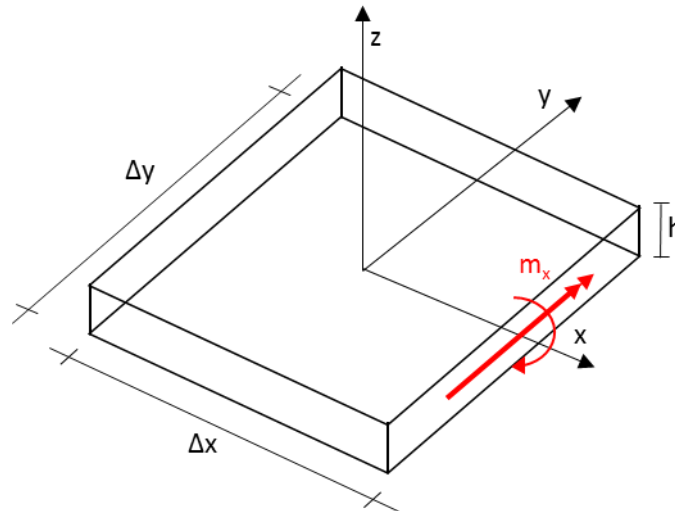


Figura 10: concio di piastra soggetto al flusso di momento dovuto alle tensioni σ_x .

Nel caso sia presente offset (o) questo va considerato negli estremi di integrazione. A titolo di esempio il momento misto torsionale diventa:

$$m_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}+o}^{\frac{h}{2}+o} \tau_{xy} z dz$$

Relazione tra le caratteristiche di sollecitazione (flussi di sforzo e flussi di momento) **e caratteristiche di deformazione** (deformazioni al piano medio e curvature):

Utilizzando le equazioni ricavate in precedenza ed esprimendo il tutto in forma matriciale si ottengono le seguenti equazioni:

$$\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\underline{\underline{D}} \underline{\underline{\varepsilon}} + z \underline{\underline{D}} \underline{\underline{K}}) dz = \underline{\underline{\varepsilon}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \underline{\underline{D}} dz + \underline{\underline{K}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \underline{\underline{D}}(z) z dz$$

$$\begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} z dz = \left[\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \underline{\underline{D}}(z) z dz \right] \underline{\underline{\varepsilon}} + \left[\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \underline{\underline{D}}(z) z^2 dz \right] \underline{\underline{K}}$$

Nelle quali si definiscono:

$$\underline{\underline{A}} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \underline{\underline{D}}(z) dz \quad \underline{\underline{B}} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \underline{\underline{D}}(z) z dz \quad \underline{\underline{C}} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \underline{\underline{D}}(z) z^2 dz$$

Le precedenti relazioni si possono quindi scrivere in forma compatta come di seguito:

$$\underline{\underline{q}} = \underline{\underline{A}} \underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{B}} \underline{\underline{K}}$$

$$\underline{\underline{m}} = \underline{\underline{B}} \underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{C}} \underline{\underline{K}}$$

Dove:

- $\underline{\underline{q}}$ è il vettore delle 3 componenti di flusso di sforzo
- $\underline{\underline{m}}$ è il vettore delle 3 componenti di flusso di momento
- $\underline{\underline{\varepsilon}}$ è il vettore delle deformazioni al piano medio
- $\underline{\underline{K}}$ è il vettore delle curvature

Infine si può esprimere il legame con un'unica relazione matriciale:

$$\begin{bmatrix} \underline{q} \\ \underline{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{B} & \underline{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\varepsilon} \\ \underline{K} \end{bmatrix}$$

Dove:

- $\begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{B} & \underline{C} \end{bmatrix}$ è la matrice (6x6) che caratterizza la rigidezza della piastra

Nel caso di materiale omogeneo isotropo si ha:

$$\underline{A} = \underline{D} h$$

$$\underline{B} = \underline{0}$$

$$\underline{C} = \underline{D} \frac{h^3}{12}$$

Dove:

- \underline{D} è la matrice di rigidezza del materiale in uno stato piano di tensione.

Si ottiene pertanto:

$$\begin{bmatrix} \underline{q} \\ \underline{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h\underline{D} & \underline{0} \\ \underline{0} & \frac{h^3}{12}\underline{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\varepsilon} \\ \underline{K} \end{bmatrix}$$

In questo caso il problema membranale e quello flesso-torsionale sono disaccoppiati tra di loro ovvero risolvibili separatamente. Al fine di ricavare la sollecitazione complessiva si effettua quindi la sovrapposizione dei singoli effetti.

Esempio applicativo

Si considera una piastra in acciaio di spessore $h=3\text{mm}$ schematizzata in *Figura 11* alla quale si applica un momento flettente distribuito $m_x = 3500 \frac{\text{Nmm}}{\text{mm}}$.

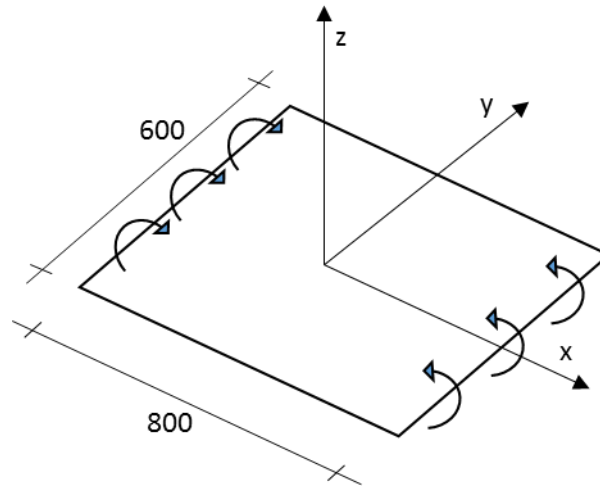


Figura 11: schema della piastra in acciaio.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3500 \frac{\text{Nmm}}{\text{mm}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\text{mm} \underline{\underline{D}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \frac{(3\text{mm})^3}{12} \underline{\underline{D}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\varepsilon_x} \\ \overline{\varepsilon_y} \\ \overline{\gamma_{xy}} \\ K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{bmatrix}$$

Risolvendo i due sistemi di 3 equazioni a 3 incognite associati rispettivamente al problema membranale e a quello flesso-torsionale si ricavano i valori di deformazione al piano medio e di curvatura incogniti. Nello specifico si ottiene $K_x \neq 0$ $K_y \neq 0$, in particolare $K_y = -\nu K_x$ ovvero la struttura presenta una doppia curvatura con deformazione a sella.

Appendici

Autori e carico orario

Ore dedicate alla stesura/revisione degli appunti di questa lezione¹.

Autore/Revisore	Prima stesura	Revisione	Seconda stesura	Totale
Callegari Marco	10			
Pelizzari Matteo	10			
Revisore 1				
Revisore 2				
Revisore 3				
Totale				

¹ La sezione relativa ai revisori è da compilarsi a cura del curatore.