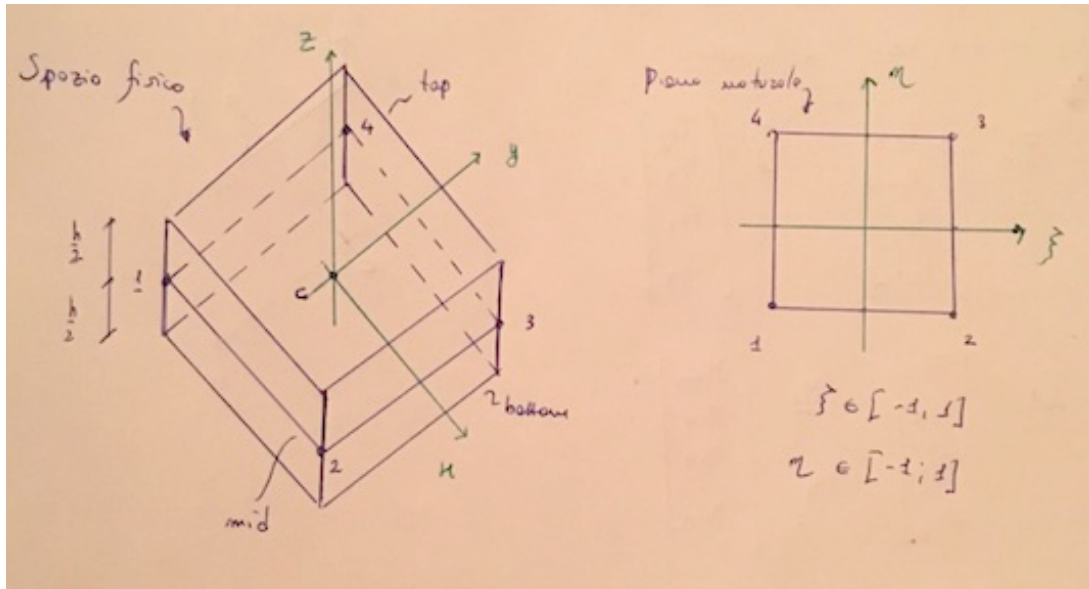


## FORZE ESTERNE SULL'ELEMENTO PIASTRA 4 NODI



*Fig. 1 [Elemento piastra 4 nodi e piano naturale]*

Si suppone di caricare i nodi dell'elemento considerato con delle forze esterne e dei momenti esterni, esprimibili dai seguenti vettori:

$$\underline{F}_x = \begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{2x} \\ F_{3x} \\ F_{4x} \end{bmatrix}; \underline{F}_y = \begin{bmatrix} F_{1y} \\ F_{2y} \\ F_{3y} \\ F_{4y} \end{bmatrix}; \underline{F}_z = \begin{bmatrix} F_{1z} \\ F_{2z} \\ F_{3z} \\ F_{4z} \end{bmatrix}; \underline{M}_x = \begin{bmatrix} M_{1x} \\ M_{2x} \\ M_{3x} \\ M_{4x} \end{bmatrix}; \underline{M}_y = \begin{bmatrix} M_{1y} \\ M_{2y} \\ M_{3y} \\ M_{4y} \end{bmatrix};$$

inoltre si considera  $\underline{M}_z$  nullo avendo escluso la rotazione  $\theta_z$  (moto di drilling).

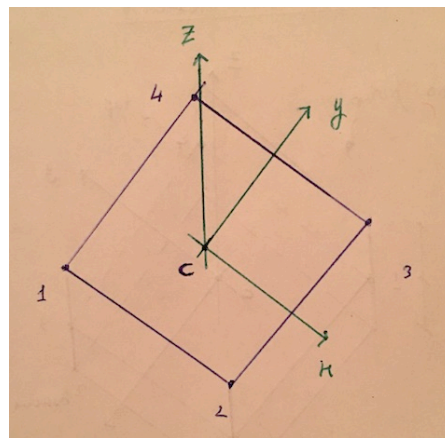


Fig. 2 [Sistema di riferimento]

Questi vettori possono essere raccolti in un unico vettore di 20 elementi:

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} \underline{F}_x \\ \underline{F}_y \\ \underline{F}_z \\ \underline{M}_x \\ \underline{M}_y \end{bmatrix}$$

Sotto l'ipotesi di comportamento elastico lineare del materiale, è possibile definire il lavoro delle forze esterne:

$L_e = \frac{1}{2} \underline{F}^T \cdot \underline{\delta}$ , dove  $\underline{F}$  e  $\underline{\delta}$  sono vettori che esprimono forze e spostamenti a fine

deformazione, con  $\underline{\delta} = \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{v} \\ \underline{w} \\ \underline{\theta}_x \\ \underline{\theta}_y \end{bmatrix}$

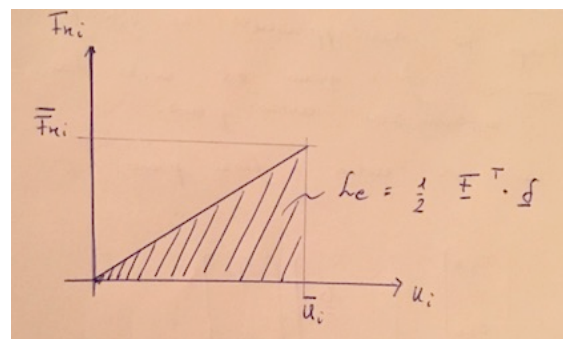


Fig. 3 [Lavoro forze esterne]

Lavorando sotto l'ipotesi di materiale elastico lineare, esisterà una matrice 20x20 che renderà vera la seguente uguaglianza:

$$\underline{F} = \underline{K} \cdot \underline{\delta}, \text{ dove } \underline{\delta} \text{ è la configurazione deformata e } \underline{K} \text{ matrice rigidezza della piastra.}$$

Le forze  $\underline{F}$  sono le forze da applicare dall'esterno, all'elemento, per equilibrare le forze interne scaturite dalla deformazione della piastra. E' quindi possibile eguagliare il lavoro delle forze interne a quello delle forze esterne:

$$L_i = L_e = \frac{1}{2} \underline{\delta}^T \underline{K} \underline{\delta}$$

Si può esprimere il lavoro delle forze interne per un generico spostamento attraverso l'energia potenziale elastica per unità di volume:

$$L_i = \iiint_V e dV, \quad \text{dove} \quad e = \frac{1}{2} \underline{\varepsilon}^T \cdot \underline{\sigma}$$

$$\underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} \quad \underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix}. \quad \text{Per l'ipotesi di tensioni piane, si trascurano } \varepsilon_z \text{ e } \sigma_z.$$

Ipotizzando di lavorare con un materiale ortotropo, con z asse di ortotropia, si ha disaccoppiamento tra sforzi entro piano e deformazioni fuori piano ed anche tra tensioni fuori piano e deformazioni entro piano.

$$\text{Si possono quindi separare i contributi entro piano} \quad \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \underline{D} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix},$$

$$\text{da quelli fuori piano} \quad \begin{bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \underline{G} \begin{bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix}.$$

Si può quindi dividere il lavoro delle forze interne in due contributi:

$$L_i = L'_i + L''_i = \iiint_V (e' + e'') dV$$

$$\text{con } e' = \frac{1}{2}(\varepsilon_x \sigma_x + \varepsilon_y \sigma_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}), \quad e'' = \frac{1}{2}(\tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{xz} \gamma_{xz})$$

**Ci si concentra sul termine  $e'$ :**

$$e' = \frac{1}{2} \underline{\varepsilon}' \cdot \underline{\sigma}' \quad \text{dove} \quad \underline{\varepsilon}' = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{\sigma}' = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

Avendo ipotizzato comportamento elastico lineare, è possibile definire  $\underline{\varepsilon}'$  in funzione degli spostamenti  $\underline{\delta}$ :  $\underline{\varepsilon}' = \underline{B}(\xi, \eta) \cdot \underline{\delta}$ , ottenendo  $\underline{\sigma}' = \underline{D} \cdot \underline{B} \cdot \underline{\delta}$ .

Ricordando la relazione  $\underline{\varepsilon} = \bar{\underline{\varepsilon}}(\xi, \eta) + z \cdot \underline{k}(\xi, \eta)$ , si ottiene:

$$\underline{\varepsilon}' = \underline{H}' \cdot \underline{J}^* \cdot \underline{Q}(\xi, \eta) \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + z \cdot \underline{H}'' \cdot \underline{J}^* \cdot \underline{Q}(\xi, \eta) \cdot \begin{bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix}$$

Unendo tutto in un'unica relazione ottengo la matrice  $\underline{B}$  di 3 righe e 20 colonne:

$$\underline{B} = \left| \underline{H}' \cdot \underline{J}^* \cdot \underline{Q} \right| \left| \underline{H}'' \cdot \underline{J}^* \cdot \underline{Q} \right|$$

quindi il lavoro interno dei contributi entro piano sarà:

$$L'_i = \iiint_V \frac{1}{2} \underline{\varepsilon}'^T \underline{\sigma}' dV = \iiint_V \frac{1}{2} \underline{\delta}^T \underline{B}^T \cdot \underline{D} \underline{B} \underline{\delta} dV$$

portando fuori le costanti moltiplicative dal segno di integrale si ottiene

$$L'_i = \frac{1}{2} \underline{\delta}^T \left[ \iiint_V \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} dV \right] \underline{\delta}$$

Si può ricavare un'espressione analoga per la quota parte fuori piano dell'energia potenziale elastica:

$$L''_i = \frac{1}{2} \underline{\delta}^T \left[ \iiint_V \underline{B}''^T \underline{G} \underline{B}'' dV \right] \underline{\delta}$$

Sommando i due contributi, si giunge or dunque all'espressione conclusiva del lavoro delle forze interne:

$$L_i = L'_i + L_i'' = \frac{1}{2} \underline{\delta}^T \underline{K} \underline{\delta}$$

dove  $\underline{K}$  racchiude in sé la somma degli integrali estesi al volume dei prodotti  $\underline{B}^T \underline{DB}$  e  $\underline{B}''^T \underline{DB}''$ ;  $\underline{K} = \iiint_V \underline{B}^T \underline{DB} dV + \iiint_V \underline{B}''^T \underline{DB}'' dV$

### Quadratura Gaussiana

Essendo le funzioni integrande complesse, si ricorre al metodo di “quadratura Gaussiana” per risolvere gli integrali.

$$\iiint_V f dV = \int_{0-h/2}^{0+h/2} \left( \iint_A f(\xi, \eta, z) dA \right) dz$$

Per risolvere l'integrale esteso al volume, si discretizza lo stesso in una serie di strati, ciascuno di spessore (in  $z$ )  $h_i$  e si integra in  $z$  usando un metodo simile a quello dei trapezi.

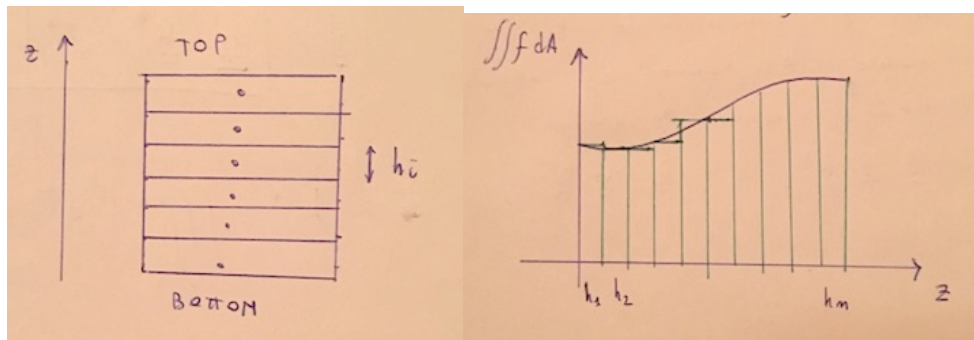


Fig. 4-5 [Discretizzazione in  $z$  e metodo di integrazione]

$$\iiint_V f dV \cong \sum_{i=1}^n h_i \iint_A f(\xi, \eta, \bar{z}_i) dA$$

dove il punto  $\bar{z}_i$  è un punto interno all' $i$ -esimo intervallo in cui l'integrale della  $f$  sull'area assume un valore medio.

## Appendici

### Lista dei simboli

$u, v, w$	spostamenti del nodo P nelle direzioni $x, y, z$ rispettivamente
$\underline{\underline{J}}^*$	Matrice Jacobiana per passaggio da coordinate naturali a coordinate locali
$\underline{\underline{H}}'$	Matrice di legame vettore deformazioni membranali con spostamenti
$\underline{\underline{H}}''$	Matrice di legame vettore delle curvature con rotazioni
...	...

### Autori e carico orario

Ore dedicate alla stesura/revisione degli appunti di questa lezione<sup>1</sup>.

<b>Autore/Revisore</b>	<b>Prima stesura</b>	<b>Revisione</b>	<b>Seconda stesura</b>	<b>Totale</b>
Edoardo Tagliamonte	4h			
Andrea Calcagni	4h			
...				
Revisore 1				
Revisore 2				
Revisore 3				
<b>Totale</b>	8h			