

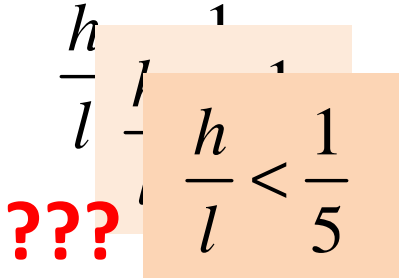
Lezione

Teoria delle Piastre

Definizioni

❖ Le piastre sottili sono elementi strutturali che hanno una dimensione (spessore) molto più piccola delle altre due (lunghezza e larghezza), e.g. lamiera.

Rapporto dimensionale



dove

h = spessore

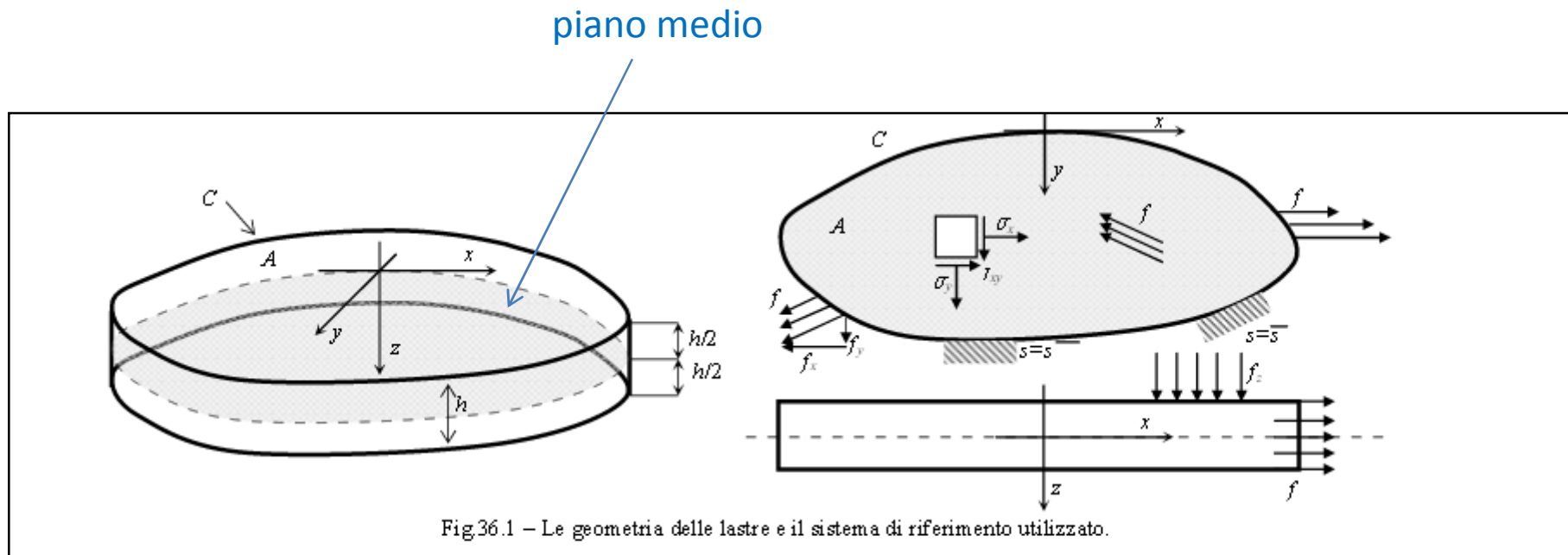
l = larghezza o lunghezza

❖ E' quindi possibile sostituire all'oggetto 3D-piastra una sua schematizzazione costituita dal piano medio [superficie media se curva] e dallo spessore puntuale.

❖ superfici diverse da quella media possono essere usate nel definire la geometria del corpo, basta supporre lo spessore non simmetricamente distribuito.

Lastra/piastra/guscio

- Lastra: geometria piana, caricata nel piano
(e.g. lastra forata sollecitata a sforzo normale o a momento flettente agente nel piano di lastra)
- Piastra [*plate*]: geometria piana, caricata fuori ed entro il piano medio
(e.g. piastra forata sollecitata a momento flettente fuori dal piano di piastra)
- Guscio [*shell*]: geometria non piana, genericamente caricata
(e.g. lamiera ottenuta per stampaggio dalla geometria complicata)

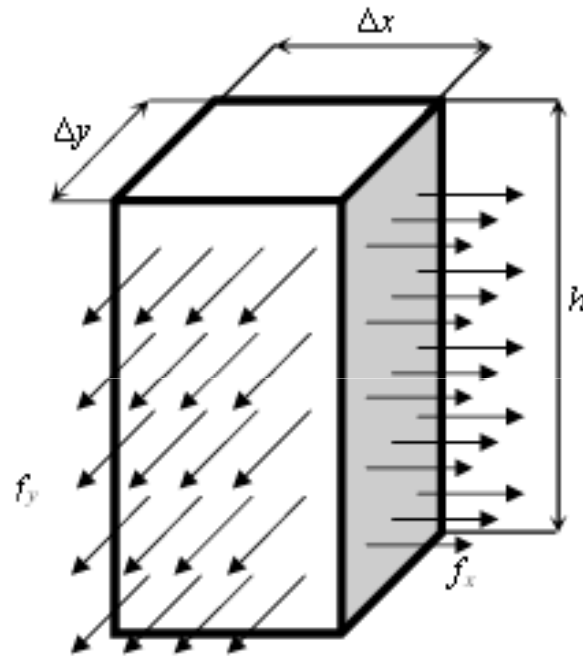


Le lastre possono essere soggette a 2 sistemi di carico, i carichi nel piano e quelli fuori dal piano descritti da funzioni variabili con x ed y :

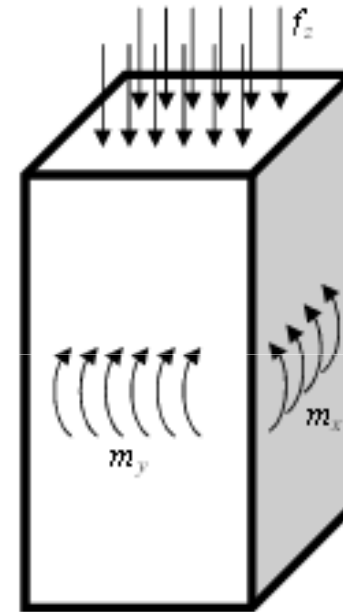
- i **carichi nel piano** sono costituiti da forze distribuite ad unità di superficie f_x ed f_y che agiscono parallelamente al piano xy , costanti lungo la direzione z ;
- i **carichi fuori dal piano** sono costituiti da forze distribuite ad unità di superficie f_z che agiscono ortogonalmente al piano xy e, nel caso più generale, da momenti distribuiti ad unità di superficie di tipo flettente m_x ed m_y .

carichi agenti **NEL** piano

carichi agenti **FUORI** dal piano



forze distribuite per unità di superficie
 f_x, f_y



forza distribuita per unità di superficie f_z
Momenti distribuiti per unità di superficie m_x, m_y

Teoria di Kirchhoff delle piastre sottili

Ipotesi

- ❖ La piastra deve essere **piana**
- ❖ I **carichi** agenti sulla piastra devono essere **normali al piano medio**
- ❖ Segmenti normali al piano medio rimangono **rettilinei e normali** alla superficie elastica: le sollecitazioni di flessione devono essere prevalenti rispetto a quelle di taglio

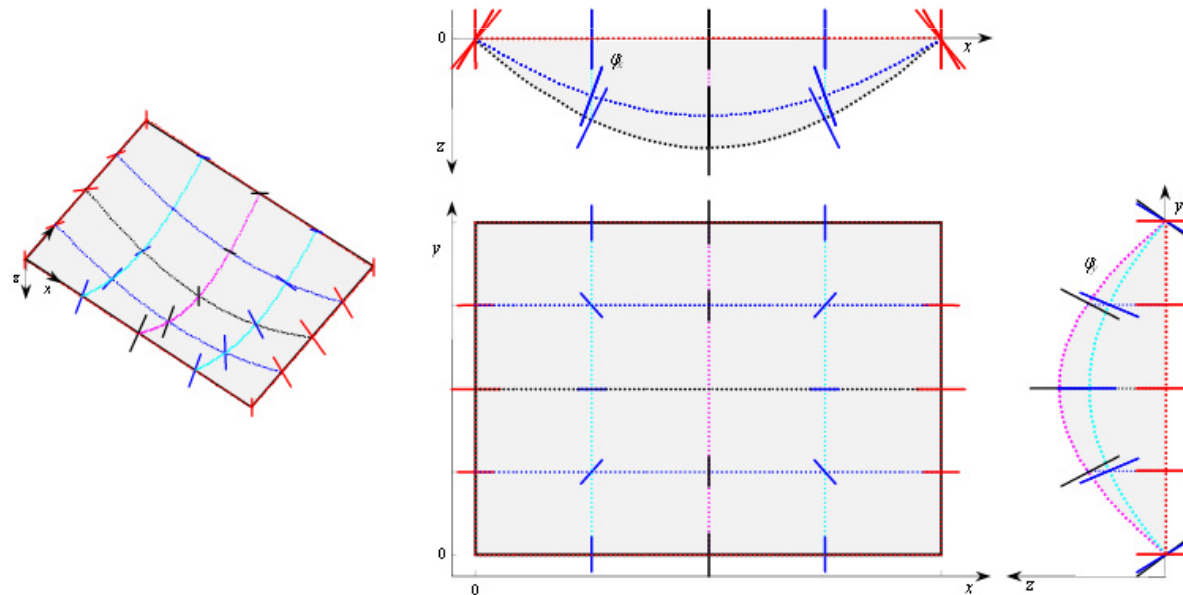


Fig.36.4 - Configurazione assunta dalle normali di una lastra rettangolare appoggiata sui 4 lati soggetta ad un carico f_z uniforme. A sinistra visualizzazione in prospettiva, a destra proiezioni ortogonali.

❖ Ipotesi semplificativa di piccoli spostamenti (rotazioni) sia garantita, che consente di approssimare la tangente dell'angolo di rotazione di una normale con l'angolo stesso.

❖ Gli abbassamenti w sono così piccoli che si può confondere la configurazione deformata e indeformata, quindi lo spostamento w coincide con quello della superficie media.

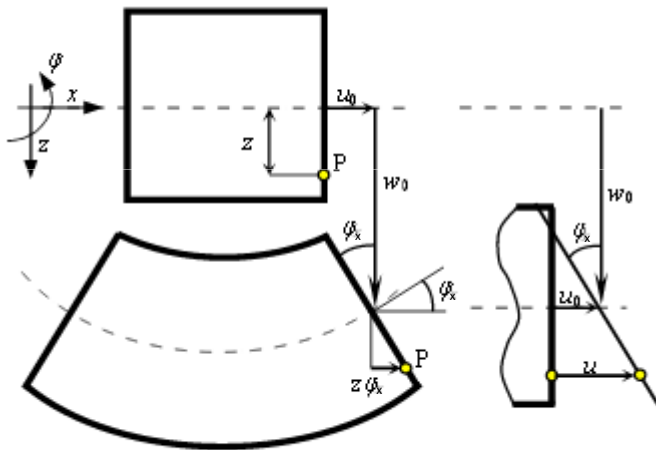


Fig.36.3 - Componenti dello spostamento in direzione x del punto P di coordinate x, y, z appartenente ad una lastra.

Componenti dello spostamento in X ed Y

$$w = w(x, y)$$

$$u = u_0 + z \tan(\varphi_x) \approx u_0 + z \varphi_x$$

$$v = v_0 + z \tan(\varphi_y) \approx v_0 + z \varphi_y$$



Spostamento del baricentro della normale

Componente dovuta alle rotazioni della normale

Proporzionalità diretta della distanza dal baricentro z

❖ Le rotazioni delle normali sono considerate positive se antiorarie

❖ I pedici x e y indicano la direzione dello spostamento in cui agiscono

$$\varphi_x = -\frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\varphi_y = -\frac{\partial w}{\partial y}$$

❖ Per le ipotesi di piccoli spostamenti e per la condizione Kirchoff, lego le rotazioni all'abbassamento w , dove per l'orientazione dell'asse z e per la convenzione assunta sulle rotazioni ho un contributo negativo.

$$w = w(x, y)$$

$$u = u_0 + z \operatorname{tg}(\varphi_x) \approx u_0 + z \varphi_x \approx u_0 - z \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$v = v_0 + z \operatorname{tg}(\varphi_y) \approx v_0 + z \varphi_y \approx v_0 - z \frac{\partial w}{\partial y}$$

LEGAME SPOSTAMENTI – ROTAZIONI PER UN GENERICO PUNTO P

LEGAME DEFORMAZIONI – SPOSTAMENTI DI UN GENERICO PUNTO P

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \varepsilon_{x0} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \varepsilon_{y0} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \gamma_{xy} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

→ le normali rimangono indeformate, cioè lo spessore della lastra rimane costante,

Deformazione al punto P

→ le normali rimangono ortogonali al piano medio.

$$\{\varepsilon(x, y)\} = \underbrace{\{\varepsilon_0(x, y)\}}_{\text{Deformazione membranale al piano medio}} + z \underbrace{\{\kappa(x, y)\}}_{\text{Curvatura del piano medio (n. 2 flex, n.1 tors)}}$$

Deformazione
membranale al
piano medio

Curvatura del
piano medio
(n. 2 flex, n.1 tors)

LEGAME DEFORMAZIONI – SPOSTAMENTI PER UN GENERICO PUNTO P

Deformazione al punto P

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}(x, y)\} = \underbrace{\{\boldsymbol{\varepsilon}_0(x, y)\}}_{\substack{\text{Deformazione} \\ \text{membranale al} \\ \text{piano medio}}} + z \underbrace{\{\boldsymbol{\kappa}(x, y)\}}_{\substack{\text{Curvatura del} \\ \text{piano medio} \\ \text{(n. 2 flex, n.1 tors)}}$$

Dalle ipotesi iniziali

→ le normali rimangono indeformate, cioè lo spessore della lastra rimane costante,

→ le normali rimangono ortogonali al piano medio.

Allora $\varepsilon_z = 0$; $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$.

La configurazione assunta dalle normali di una lastra rettangolare appoggiata sui 4 lati soggetta ad un carico fz uniforme.

Nella proiezione sul piano xz è possibile osservare come le normali disposte lungo la direzione Y abbiano rotazioni φ_x variabili sia rispetto all'ascissa x, dando luogo a curvature flessionali, sia rispetto all'ascissa y, dando luogo a curvature torsionali (ad eccezione di quelle appartenenti al piano di simmetria).

Analoga osservazione può essere fatta nel piano yz relativamente alla variazione delle rotazioni φ_y lungo le direzioni y ed x.

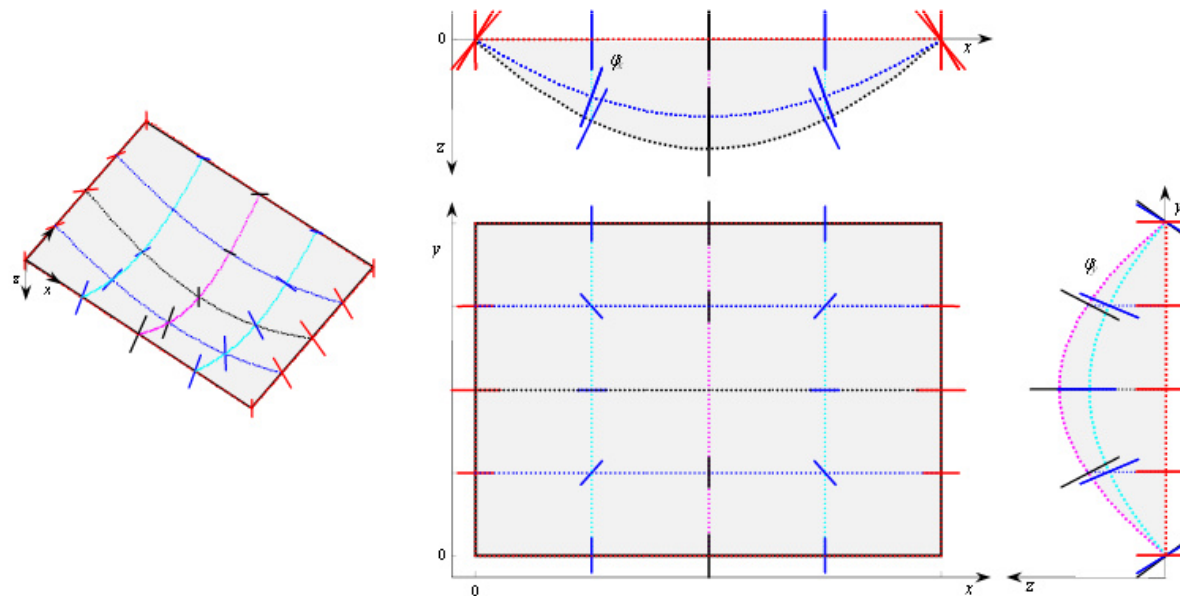


Fig.36.4 - Configurazione assunta dalle normali di una lastra rettangolare appoggiata sui 4 lati soggetta ad un carico f_z uniforme. A sinistra visualizzazione in prospettiva, a destra proiezioni ortogonali.

Ipotesi

❖ Le **tensioni normali** devono essere **nulle** in corrispondenza del **piano medio**: la piastra deve avere una sufficiente rigidezza flessionale

❖ La tensione normale σ_z è trascurabile: lo stato di **tensione piana (h piccolo)**

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} = [D] \{\varepsilon_0\} + z [D] \{\kappa\}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \underbrace{\frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}}_{[D]} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{MAT. ISOTROPO}$$

LEGAME COSTITUTIVO: TENSIONE - DEFORMAZIONE PER UN GENERICO PUNTO P

Ipotesi:

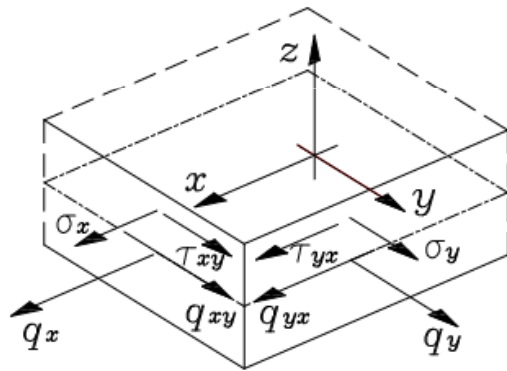
-tensione piana consente una libera strizione

-ipotesi di Kirchhoff: sezione rimane piana ed indeformata per piccole rotazioni

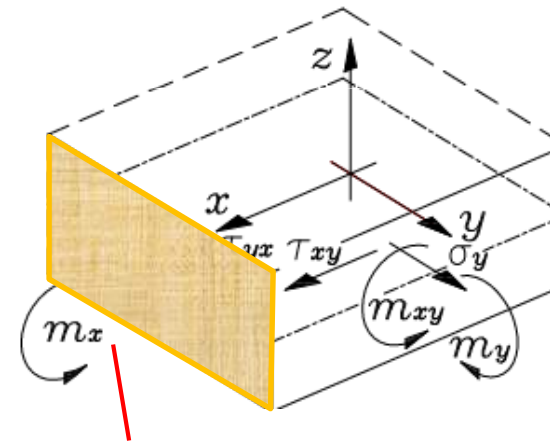
→ non sono in conflitto se penso che ogni sezione parallela al piano medio venga separata in più strati, eliminando la continuità. Solamente alla fine ricompongo il sistema e ripristino la continuità cinematica in direzione z.

Preferibile operare con le **sollecitazioni risultanti (flussi)**, invece che con le tensioni.
In particolare, tali risultanti sono le forze e i momenti per unità di lunghezza agenti sulle normali che si ottengono integrando rispetto allo spessore h della lastra, rispettivamente, le tensioni e i prodotti delle tensioni per le distanze dal baricentro della normale.

Flussi degli sforzi estesi allo spessore



Flussi dei momenti degli sforzi



Momento agente sulla sezione ortogonale all'asse x
→ Ottenuto per integrazione di σ solo spessore.

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \{\sigma\} dz$$

Flusso degli sforzi estesi allo spessore

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_{xy} \end{Bmatrix} = \left(\int_{-h/2}^{h/2} [D] dz \right) \{\varepsilon_0\} - \left(\int_{-h/2}^{h/2} [D] z dz \right) \{\kappa\}$$

[N/mm]

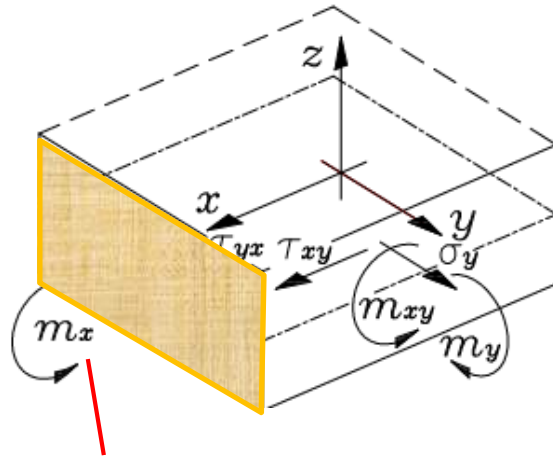
$$\{m\} = \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \{\sigma\} z dz$$

Flusso dei momenti degli sforzi

$$\{m\} = \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{Bmatrix} = \left(\int_{-h/2}^{h/2} [D] z dz \right) \{\varepsilon_0\} - \left(\int_{-h/2}^{h/2} [D] z^2 dz \right) \{\kappa\}$$

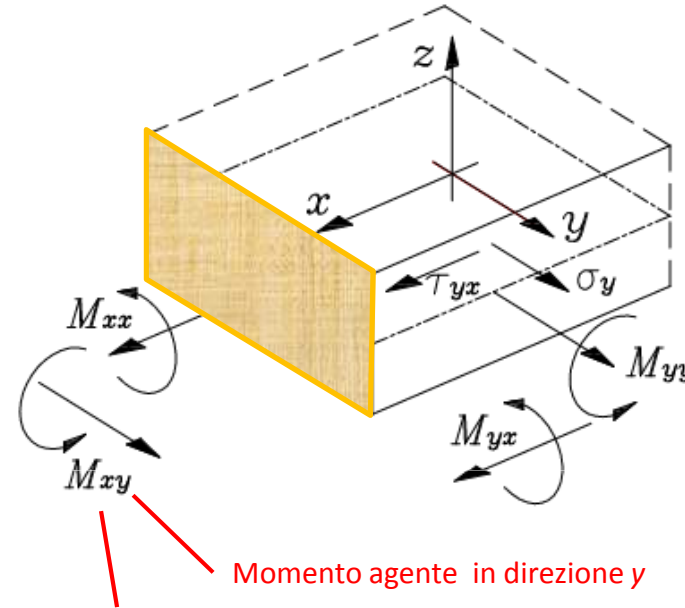
[N mm/mm]

Flussi dei momenti degli sforzi



Momento agente sulla sezione ortogonale all'asse x

Componenti dei vettori momenti



Momento agente in direzione y

Momento agente sulla sezione ortogonale all'asse x

$$M_{xy} = m_x$$

$$M_{xx} = -m_{xy}$$

$$M_{yx} = -m_y$$

$$M_{yy} = m_{xy}$$

Flusso degli sforzi

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_{xy} \end{Bmatrix} = \boxed{[A]} \left(\int_{-h/2}^{h/2} [D] dz \right) \{\varepsilon_0\} - \boxed{[B]} \left(\int_{-h/2}^{h/2} [D] z dz \right) \{\kappa\}$$

Flusso dei momenti degli sforzi

$$\{m\} = \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{Bmatrix} = \boxed{[B]} \left(\int_{-h/2}^{h/2} [D] z dz \right) \{\varepsilon_0\} - \boxed{[C]} \left(\int_{-h/2}^{h/2} [D] z^2 dz \right) \{\kappa\}$$

$$\begin{Bmatrix} q \\ m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_0 \\ \kappa \end{Bmatrix}$$

❖ Le matrici A, B, C sono simmetriche poiché dipendono da [D] che è simmetrica.

La matrice [A] mette in relazione la risultante delle forze con le deformazioni nel piano medio.

$$\begin{Bmatrix} q \\ m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_0 \\ \kappa \end{Bmatrix}$$

La matrice [B] accoppia la componente flessionale e la membranale

La matrice [C] mette in relazione la risultante dei momenti con le curvature nel piano medio.

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}$$

$$[A] = [D] \int_{-h/2}^{h/2} dz = h [D]$$

$$[B] = [D] \int_{-h/2}^{h/2} z dz = 0$$

$$[C] = [D] \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = \frac{h^3}{12} [D]$$

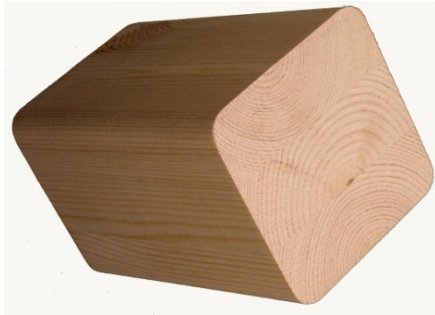
❖ **MATERIALE ISOTROPO**, la matrice di rigidezza [D] è costante sullo spessore

❖ La matrice [D] dipende dal modulo di Young del materiale e dal coeff. di Poisson.

❖ Matrice [A] è linearmente dipendente dallo spessore

❖ Matrice [C] è dipendente dallo spessore al cubo

Molti materiali di uso comune sono **compositi**, e.g. il legno, il calcestruzzo, il cemento armato, le ossa.



cellulosa & lignina



pietriscio & cemento
(+ ferro)



apatite & collagene

DEFINIZIONE:

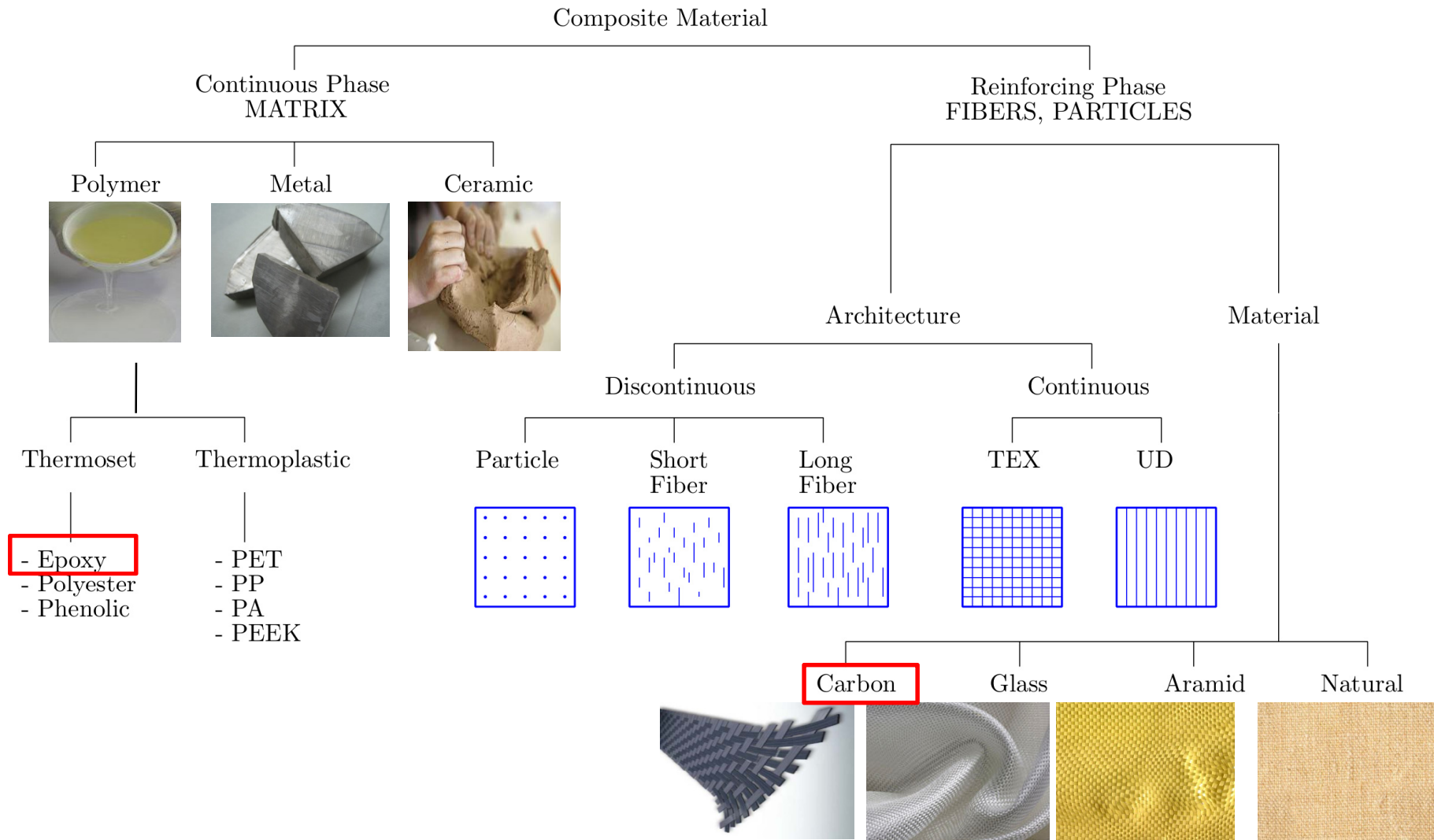
Con il termine “*materiale composito*” si intende un materiale costituito da **due o più fasi** o **componenti** tale che:

- 1) sia possibile individuare, a scala macroscopica, la superficie di **interfaccia**,
- 2) siano **chimicamente distinte**,
- 3) abbiano **caratteristiche fisico-meccaniche** significativamente **diverse**.

RINFORZO: elemento più resistente; presente in fase discontinua (fibre o particelle)

MATRICE: elemento meno resistente; presente in fase continua

COMPOSITI STRUTTURALI



APPLICAZIONI

AUTOMOTIVE



- Componenti strutturali per abitacolo
- Componenti vagoni ferroviari
- Assorbitori d'urto
- Cofani, pannellature
- Cerchi
- Giunzioni strutturali ibride

INDUSTRIAL



- Alberi/rotori
- Bracci per robot
- Attuatori lineari pneumatici/oleod.
- Giunzioni strutturali ibride

AERONAUTICO



- Turbine Housing
- Rotori, pale
- Carrelli per l'atterraggio
- Giunzioni per la connessione della fusoliera

MISCELLANEA

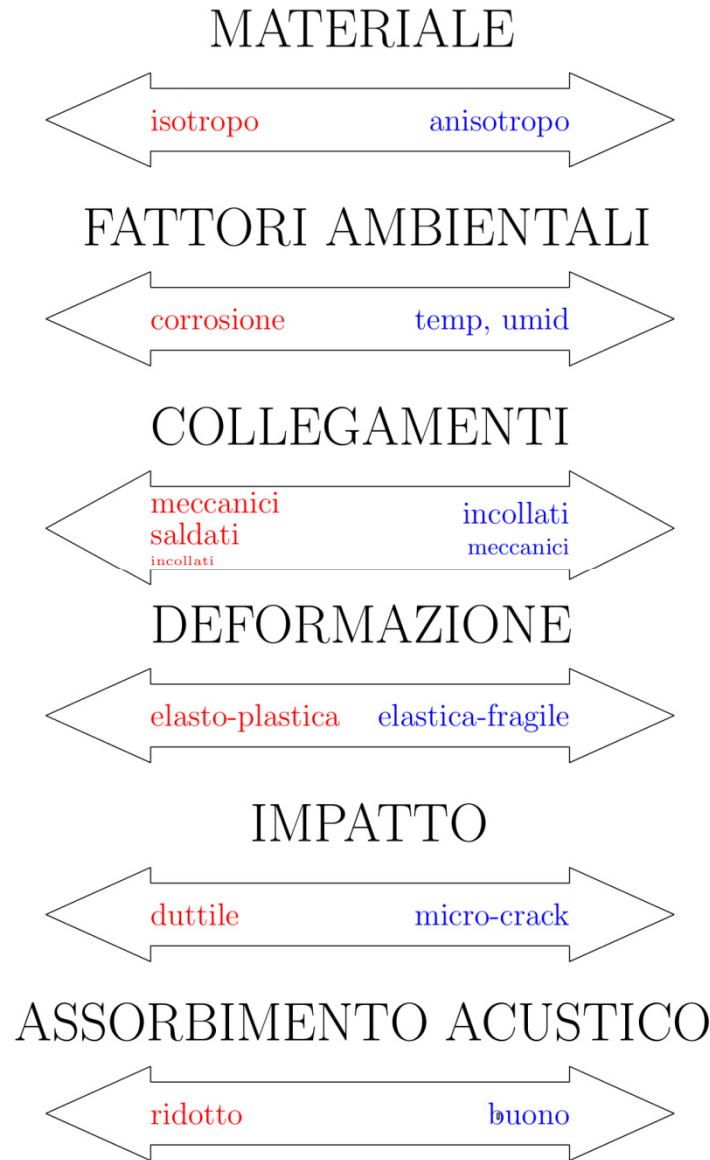


- Dispositivi biomedicali
- Applicazioni nautiche
- Edilizia & Design
- Attrezzatura sportiva
- Rivestimenti estetici "carbon-look"

MATERIALI METALLICI vs MATERIALI

Le proprietà fisiche non dipendono dalla direzione in cui il componente viene sollecitato

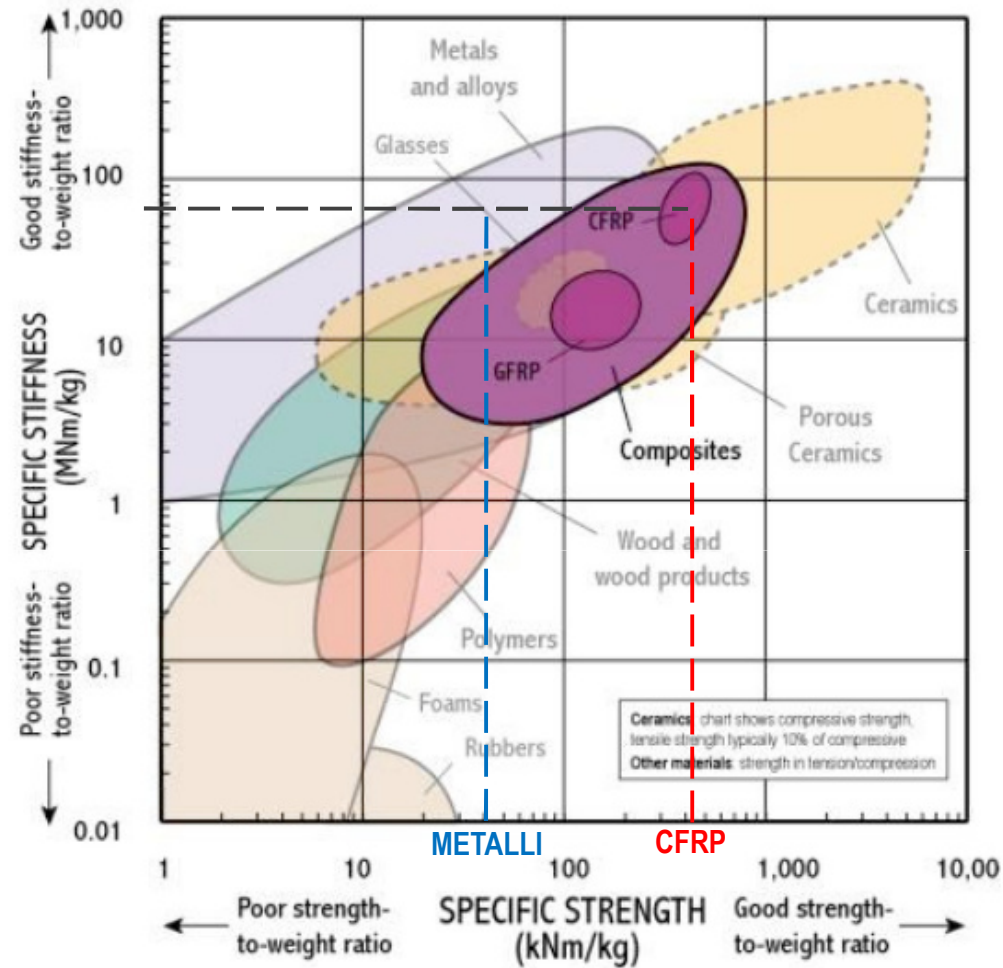
MATERIALI METALLICI



MATERIALI COMPOSITI

Le proprietà fisiche dipendono FORTEMENTE dalla direzione in cui il componente viene sollecitato

RIGIDEZZA SPECIFICA - RESISTENZA SPECIFICA

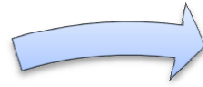


I materiali **compositi** possono avere una resistenza specifica superiore a quella dei **metalli** a parità di rigidità specifica

“I materiali COMPOSITI sono sinonimo di LEGGEREZZA e RESISTENZA”



Braiding



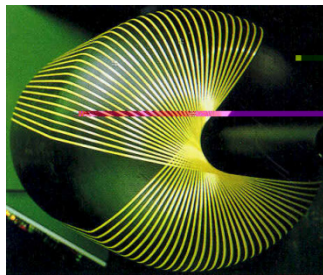
Hand lay up



Pultrusion



*Filament
Winding*



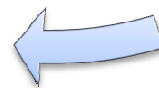
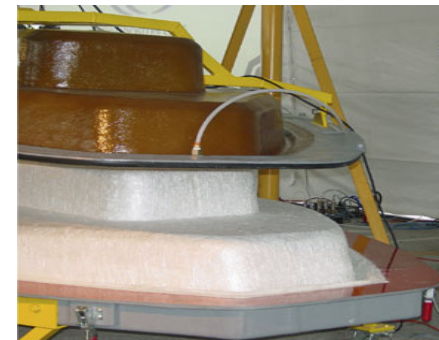
LE TECNOLOGIE



Autoclave



*Resin
Transfer
Molding*



“I materiali COMPOSITI sono sinonimo di VERSATILITA”

Teoria delle piastre sottili per materiali compositi

Lamina ortotropa: la presenza di tre piani di simmetria mutuamente ortogonali riduce a 9 il numero delle costanti caratteristiche

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}$$

I termini nulli della matrice sono quelli che esprimono l'accoppiamento tra tensioni normali e scorrimenti e tra tensioni tangenziali e dilatazioni

L'isotropia trasversale riduce a 5 le costanti caratteristiche indipendenti

$$\sigma_{33} = 0 \quad , \quad \tau_{23} = 0 \quad , \quad \tau_{31} = 0$$

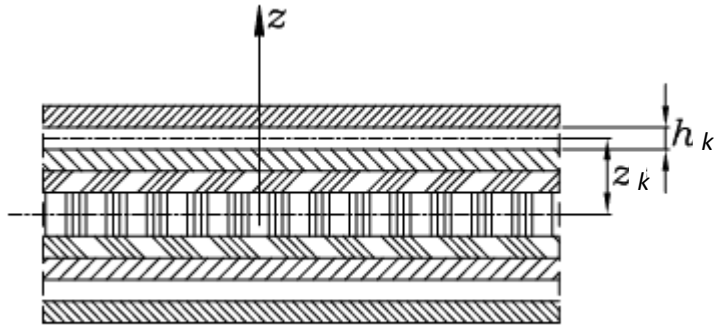
e quindi si ha:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & Q_{12} &= \frac{\nu_{12} E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{21} E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \longrightarrow \frac{E_{11}}{\nu_{12}} = \frac{E_{22}}{\nu_{21}} \\ Q_{22} &= \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & Q_{66} &= G_{12} \end{aligned}$$

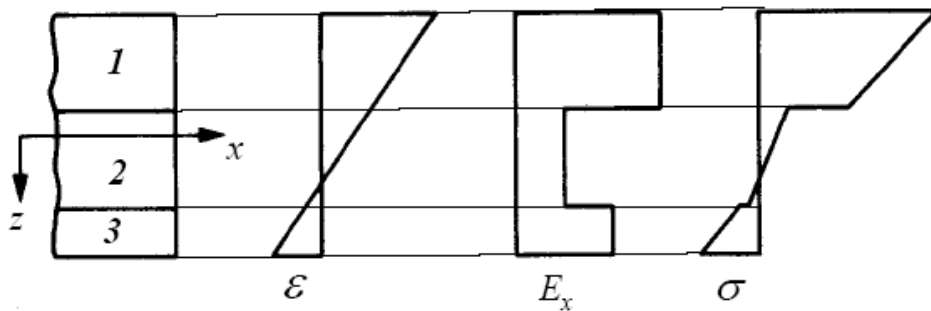
Le costanti che descrivono il legame tra tensioni e deformazioni nella lamina ortotropa in stato piano di tensione dipendono solo dalle 4 costanti elastiche, la matrice [Q] relativa alla singola lamina è simmetrica.

Dalla lamina al laminato



Equazioni Costitutive: stato tensionale nella generica lamina k-esima

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [\tilde{E}]_k \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [\tilde{E}]_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + z [\tilde{E}]_k \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix}$$



Le deformazioni sono continue nel passaggio tra le lamine → andamento lineare a FARFALLA.

LE TENSIONI NO (perché le matrici costitutive **NON NECESSARIAMENTE** sono le stesse tra le diverse lamine)

Equazioni di equilibrio: Equivalenza statica tra tensioni e caratteristiche della sollecitazione sul laminato

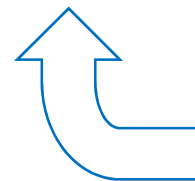


$$N_i = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_i dz$$

$$M_i = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_i z dz$$

$i = x; y; xy$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^\circ \\ \varepsilon_y^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_{14} & H_{15} & H_{16} \\ H_{12} & H_{22} & H_{23} & H_{24} & H_{25} & H_{26} \\ H_{13} & H_{23} & H_{33} & H_{34} & H_{35} & H_{36} \\ H_{14} & H_{24} & H_{34} & H_{44} & H_{45} & H_{46} \\ H_{15} & H_{25} & H_{35} & H_{45} & H_{55} & H_{56} \\ H_{16} & H_{26} & H_{36} & H_{46} & H_{56} & H_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}$$



Equazione Pseudo-Costitutiva del Laminato: fornisce il legame tra deformazioni e caratteristiche della sollecitazione

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{A} & \text{B} \\ \text{B} & \text{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{ij} = \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1})$$

$$\mathbf{B}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2)$$

$$\mathbf{D}_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3)$$

A: matrice di accoppiamento tra Deformazioni nel piano e Sforzi nel piano
(Matrice di rigidezza estensionale)

B: matrice di accoppiamento tra Deformazioni nel piano e Momenti fuori dal piano
e fra Curvature fuori dal piano e Sforzi nel piano (Matrice di Accoppiamento)

D: matrice di accoppiamento tra Curvature e Momenti fuori dal piano
(Matrice di rigidezza flessionale)

Tipi particolari di Laminati

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^\circ \\ \varepsilon_y^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & \mathbf{B} \\ H_{12} & H_{22} & H_{23} & \\ H_{13} & H_{23} & H_{33} & \\ \mathbf{B} & H_{44} & H_{45} & H_{46} \\ & H_{45} & H_{55} & H_{56} \\ & H_{46} & H_{56} & H_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}$$

Laminati SIMMETRICI

$$\longleftrightarrow \mathbf{B} = \mathbf{0} \longleftrightarrow$$

Le lamine disposte simmetricamente rispetto al piano medio sono uguali e con stesso orientamento; poiché ad ogni termine $z_k h_k [Q]_k$

$$0^\circ \setminus 0^\circ \setminus +45^\circ \setminus -45^\circ \setminus -45^\circ \setminus +45^\circ \setminus 0^\circ \setminus 0^\circ$$

Accoppiamento nullo tra flessione e sforzo normale (importante per evitare distorsioni a valle del processo di cura)

$$\longrightarrow [0_2 / \pm 45^\circ]_s$$

Tipi particolari di Laminati

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^\circ \\ \varepsilon_y^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_{14} & H_{15} & H_{16} \\ H_{12} & H_{22} & H_{23} & H_{24} & H_{25} & H_{26} \\ H_{13} & H_{23} & H_{33} & H_{34} & H_{35} & H_{36} \\ H_{14} & H_{24} & H_{34} & H_{44} & H_{45} & H_{46} \\ H_{15} & H_{25} & H_{35} & H_{45} & H_{55} & H_{56} \\ H_{16} & H_{26} & H_{36} & H_{46} & H_{56} & H_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}$$

Laminati ORTOTROPI
o **BILANCIATI**

$$\longleftrightarrow A_{13} = A_{23} = 0 \longleftrightarrow$$

Per ogni lamina orientata secondo un angolo θ ne esiste una orientata di $-\theta$ a prescindere dalla sequenza

$$0^\circ \setminus 0^\circ \setminus +45^\circ \setminus -45^\circ \setminus -45^\circ \setminus +45^\circ \setminus 0^\circ \setminus 0^\circ$$

Accoppiamento nullo tra sforzo normale e scorrimenti e fra taglio e deformazioni normali

Tipi particolari di Laminati

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^\circ \\ \varepsilon_y^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_{14} & H_{15} & H_{16} \\ H_{12} & H_{22} & H_{23} & H_{24} & H_{25} & H_{26} \\ H_{13} & H_{23} & H_{33} & H_{34} & H_{35} & H_{36} \\ H_{14} & H_{24} & H_{34} & H_{44} & H_{45} & H_{46} \\ H_{15} & H_{25} & H_{35} & H_{45} & H_{55} & H_{56} \\ H_{16} & H_{26} & H_{36} & H_{46} & H_{56} & H_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}$$

Laminati con $D_{13} = D_{23} = 0$



Per ogni lamina orientata secondo un angolo θ ne esiste una orientata di $-\theta$ e simmetricamente disposta rispetto alla mezzeria

Accoppiamento nullo Momenti flettenti e curvatura torsionale e fra momento torcente e curvature flessionali

NON compatibile con la condizione di simmetria

Tipi particolari di Laminati

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^\circ \\ \varepsilon_y^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_{14} & H_{15} & H_{16} \\ H_{12} & H_{22} & H_{23} & H_{24} & H_{25} & H_{26} \\ H_{13} & H_{23} & H_{33} & H_{34} & H_{35} & H_{36} \\ H_{14} & H_{24} & H_{34} & H_{44} & H_{45} & H_{46} \\ H_{15} & H_{25} & H_{35} & H_{45} & H_{55} & H_{56} \\ H_{16} & H_{26} & H_{36} & H_{46} & H_{56} & H_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}$$

Laminati con $D_{13} = D_{23} = 0$ \longleftrightarrow

...però se si dispongono lamine successive con orientamento opposto, allora si ottengono valori molto bassi per D_{13} e D_{23}

→ Accoppiamento quasi nullo tra flessione e torsione

→ $[0_2 / \pm 45^\circ]_s$

Il laminato suddetto disaccoppia (quasi!) anche la torsione dalla flessione

Tipi particolari di Laminati

Laminati quasi isotropi \longleftrightarrow **La matrice A è isotropa**

Condizione necessaria e sufficiente affinché un laminato sia quasi isotropo è che si abbia:

- numero lamine (n) maggiore o uguale a 3
- tutte le lamine siano uguali come spessore e materiale
- lamine equispaziate angolarmente: $\Delta\theta = 2\pi/n$

Osservazione: L'isotropia vale solo per le rigidzze a trazione e compressione

Es. laminato quasi isotropo, simmetrico e bilanciato con basso accoppiamento tra flessione e torsione

$$[\pm 30/\pm 90/\pm 30]_s$$

Classificazione in base al piano medio

- ❖ Lastra (Plate): il piano medio è una superficie piana e i carichi agiscono nel piano medio
- ❖ Piastra piana (Plate): il piano medio è una superficie piana e i carichi sono generalmente normali al piano
- ❖ Piastra curva (Shell): il piano medio è una superficie curva

Classificazione in base allo spessore

- ❖ Piastra uniforme: lo spessore è identico in tutti i punti
- ❖ Piastra a spessore variabile

Classificazione strutturale

- ❖ **Piastre sottili o di Kirchoff:** piastre aventi uno spessore piccolo ma tale da garantire una certa rigidità flessionale
- ❖ **Piastre spesse o di Mindlin:** lo spessore è tale che non è più accettabile trascurare le deformazioni di taglio
- ❖ **Gusci o Membrane (Thin Shell):** piastre curve caratterizzate da uno spessore così piccolo che gli unici sforzi rilevanti sono quelli membranali
- ❖ **Piastre curve a grande spessore (Shell):** caratterizzate da uno spessore tale da non poter trascurare alcun tipo di sollecitazione (es. tubi spessi, cupole, grossi serbatoi, dischi)

Teoria dei gusci sottili o membrane

Spessore t molto piccolo

Rigidezza flessionale trascurabile

$$M_x, M_y, M_{xy}, M_{yx}, T_x, T_y = 0$$

$$N_{xy} = N_{yx}$$

Teoria di Kirchhoff delle piastre sottili

Lastre piane: $r_x = r_y = 0$

$$N_x, N_y, N_{xy} = 0$$

Spessori sottili

$$N_{xy} = N_{yx}; M_{xy} = M_{yx}$$

Teoria di Mindlin delle piastre spesse

Spessore t elevato

Tensioni di taglio τ_{xz}, τ_{yz} rilevanti