Lezione del 28/05/19

a cura di U.Gallo e G.Giannola

Si riprende la lezione precedente.

Si analizzano le risposte di strutture dinamiche:

$$(-\omega^2\underline{\underline{M}}+j\omega\underline{\underline{C}}+\underline{\underline{K}})\bar{d} = \bar{\underline{f}}$$

-$\underline{\underline{M}}$ è la matrice di massa, che è simmetrica e positiva;

-$\underline{\underline{C}}$ è la matrice di smorzamento viscosa, simmetrica e positiva;

-$\underline{\underline{K}}$ è la matrice di rigidezza, che è simmetrica e positiva, termini complessi possono comparire all'interno della matrice;

- $\bar{\underline{f}}$ (t) è il vettore delle forze esterne (generalizzate);

-$\bar{d}$ (t) raccoglie i DOF di sistema, che variano nel tempo.

La risposta di strutture dinamiche si definisce considerando azioni elastiche, viscose e inerziali. Si è vista la risposta periodica, imponendo un comportamento lineare della struttura per poter escludere un comportamento caotico della stessa. Ad esempio un comportamento con gioco determina un comportamento caotico. Aspetto fondamentale della cinematica è che in caso di gioco questo si escluda se non è un elemento fondamentale per l'analisi.

Una soluzione periodica può essere scomposta con serie di Fourier, ciò non determina la perdita di generalità.

Il termine noto f contiene informazioni anche riguardo gli spostamenti imposti e può essere definito come composto da una parte reale, modulata secondo una funzione coseno, e una parte immaginaria modulata secondo funzioni seno.

$$\underline{f}(t) = \underline{\bar{f}}\, e^{j\omega t}$$

Con modulo complessivo $\bar{f}=\sqrt{a^2+b^2}$ e fase funzione di a e b. Il carico risulta essere applicato ad ogni grado di libertà.

La parte tra parentesi dell'equazione del sistema è una matrice a termini complessi, dove $\bar{\mathrm{d}}$ è la risposta in termini complessi. Si può semplificare in alcuni casi considerando $\underline{\underline{C}}$ uguale a 0. La $\underline{\underline{M}}$ è reale, invece la $\underline{\underline{K}}$ risulta reale togliendo i termini di smorzamento strutturale.

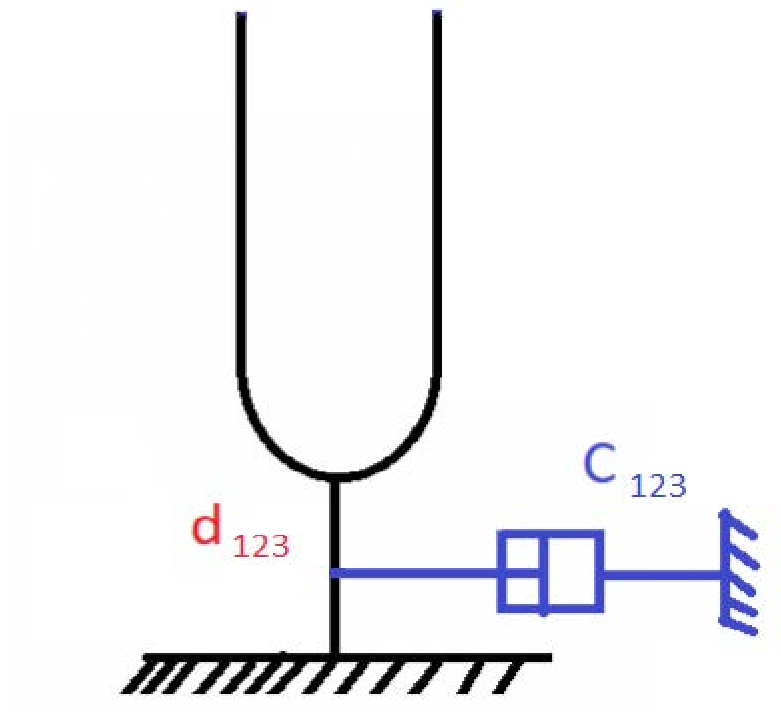
Se $\underline{f}$ è reale allora si ha un sistema a termine noto reale. La risposta quindi sarà in quota completamente reale.

Nel caso in cui si vogliano rappresentare fasi intermedie allora il termine noto deve contenere parte reale e immaginaria. Se la parte immaginaria è tutta confinata al solo termine noto allora si possono separare i problemi e scrivere:

$$\left(-\omega^2 \underline{\underline{M}} + \underline{\underline{K}}\right) R_e\left(\underline{\bar{d}}\right) = R_e\left(\underline{\bar{f}}\right)$$
$$\left(-\omega^2 \underline{\underline{M}} + \underline{\underline{K}}\right) I_m\left(\underline{\bar{d}}\right) = I_m\left(\underline{\bar{f}}\right)$$

Nel caso in cui la matrice di sistema sia a termini reali invece di avere un sistema di 2n equazioni e 2n incognite avrò un sistema n x n.

Si definisce ora la matrice $\underline{\underline{C}}$ come matrice smorzamento con un esempio, quello di un diapason vincolato a terra da un incastro e sullo stelo da uno smorzatore viscoso:

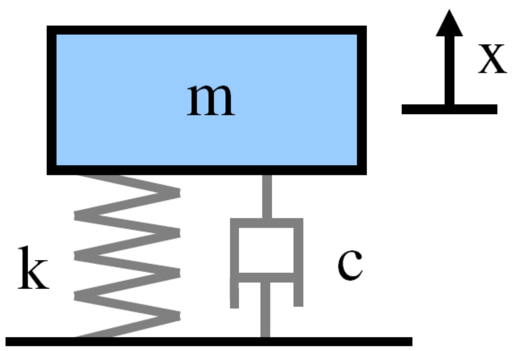


La matrice $\underline{\underline{C}}$ si costruisce prima tutta nulla e poi si posizionano sulla diagonale i contributi degli elementi smorzanti. Si suppone che gli smorzatori dissipino energia in ordine di grandezza superiore a quella dell'acciaio armonico del diapason, pertanto tutti i termini dello smorzamento proprio del materiale sono trascurabile rispetto agli smorzatori viscosi concentrati. Quindi la matrice $\underline{\underline{C}}$ è piena di zeri.

Tutto ciò che è di uno smorzatore a terra finisce sulla diagonale, se invece è tra 2 gradi di libertà il suo contributo entra ai vertici delle intersezioni tra i gradi di libertà interessati oltre che nella diagonale.

Solo in casi complicati allora la matrice non sarà distribuita. Se il sistemaha smorzatori concentrati come nell'albero motore di una macchina, allora la matrice è tutta nulla tranne nei termini in cui si collega il dispositivo smorzante.

Se lo smorzamento è molto forte la sollecitazione non è periodica, Se lo smorzatore è debole la sollecitazione allora è periodica. Esiste un valore soglia che fa da transizione tra i 2 casi:



Lo smorzamento specifico viene rappresentato come frazione del valore soglia, sarà una frazione minore di 1.

S tratta di uno scalare che descrive la risposta di un oscillatore a 1 grado di libertà (come quello in figura).

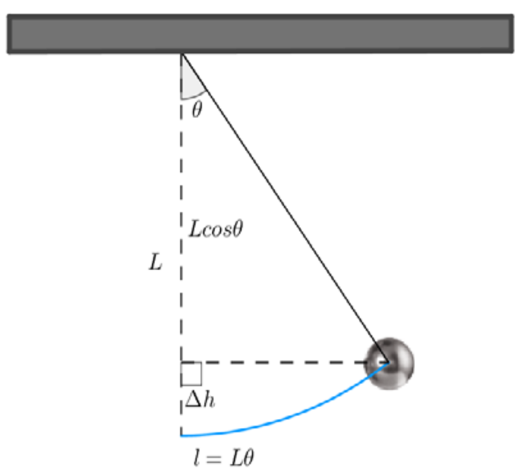
Si continua l'analisi modale:

Ci si chiede se il sistema possa avere soluzioni diverse da quella banale in assenza di forzante esterna.

Per analizzare tale aspetto occorre eliminare i termini dissipativi. Se la matrice è a rango pieno la soluzione è una sola ed è quella banale. Se per specifici valori riesco a portare il rango della matrice diverso da quello pieno allora posso definire delle soluzioni non banali.

Per ogni ω che annulla il determinante della matrice, si otterrà una coppia di autovalori e autovettori. Si può ridurre dunque questo problema in uno semplice e risolverlo, un problema agli autovalori. Dal quale si ottengono delle coppie di auto valori e auto vettori appunto. L'autovalore è la pulsazione ω al quadrato che posso ricavare tramite la frequenza f o viceversa. L'autovettore sarà $\hat{d}_i$.

Si prende come esempio un pendolo, o meglio definito oscillatore semplice:



il pendolo ha 2 gradi di libertà (può oscillare a destra e sinistra entro piano o avanti e indietro fuori piano), dunque avremo due frequenze delle due oscillazioni.

Se le due frequenze sono uguali troverò 2 autovalori e 2 autovettori. Se le due frequenze non sono uguali, avrò ovviamente 2 oscillazioni diverse, che nella realtà e nel Marc è la norma avere due frequenze diverse, anche per uno 0,0001 Hz.

Dunque, se le frequenze sono molto simili, è opportuno modulare le frequenze in modo tale da troncare fino all’ultima cifra significativa, fino ad avere dunque la stessa frequenza.

La modulazione dei valori è soprattutto un problema del Marc, infatti si vede che non esiste una scalatura per gli autovettori, cioè se troviamo dei valori di tensione di Von-Mises abbastanza alti, non vuol dire che il materiale snervi per dato valore, perchè devo appunto scalare e ridurre il valore trovato. Come nella molla trattata/fatta in laboratorio, facciamo oscillare e deformare la molla, prendiamo i valori ottenuti, e per sapere di quanto scalare questi risultati dovrò sempre fare un test esterno semplice nei calcoli, in questo caso farò oscillare una molla fisica, misuro l’oscillazione reale, e confronto il risultato con quello trovato nel Marc, il rapporto tra le due quantità sarà il fattore di scala, cioè il fattore da moltiplicare ad ogni valore trovato su Marc affinchè possa ottenere dei valori effettivi reali, come anche la Von-Mises.

In Marc viene normalizzato l'autovettore, è solo una convenienza numerica.

Continuando l'analisi modale:

Immaginiamo che una forzante $\underline{\mathrm{f}}\,(t) = \bar{\underline{\mathrm{f}}}\,e^{j\omega t}$ non nulla faccia entrare in risonanza il sistema $(-\omega^2\,\underline{\underline{\mathrm{M}}} + j\omega\,\underline{\underline{\mathrm{C}}} + \underline{\underline{\mathrm{K}}})\;\bar{\underline{\mathrm{d}}} = \bar{\underline{\mathrm{f}}}$ che risponde come $\underline{\mathrm{d}}\,(t) = \bar{\underline{\mathrm{d}}}\,e^{j\omega t}$.

Si è nelle condizioni di risonanza quando la pulsazione dell'eccitante è uguale a quella del modo proprio della struttura.

Derivando la risposta del sistema $\underline{\mathrm{x}}\,(t) = a\,\hat{\underline{\mathrm{d}}}_{\,i}\,\sin(\omega_i t)$

e sostituendo le derivate e la risposta del sistema all'equazione del sistema stesso, si trova

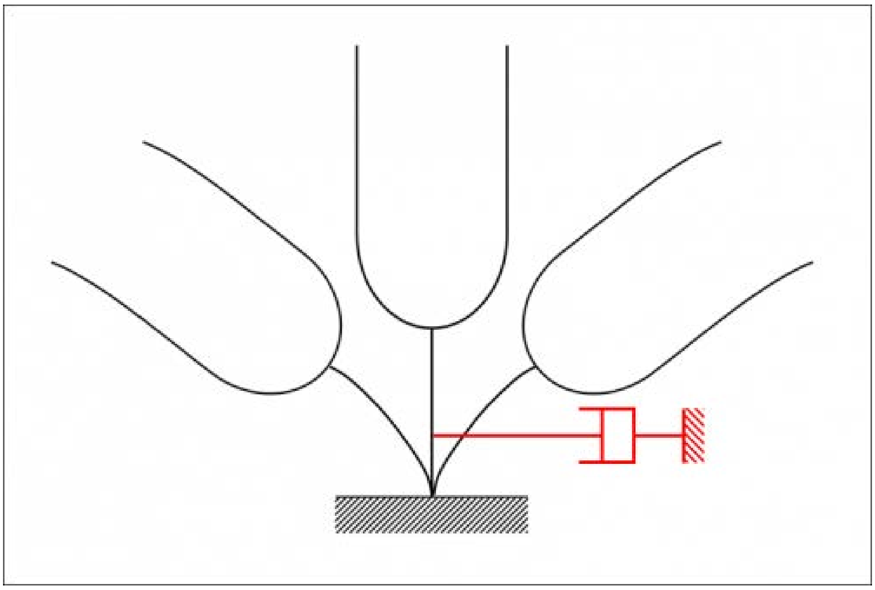
$$\underbrace{(-\omega_i^2\,\underline{\underline{\mathrm{M}}} + \underline{\underline{\mathrm{K}}})\;\hat{\underline{\mathrm{d}}}_{\,i}}_{=\underline{0}}\,a_i \sin(\omega_i t) + \omega_i a_i\,\underline{\underline{\mathrm{C}}}\;\hat{\underline{\mathrm{d}}}_{\,i}\cos(\omega_i t) = \bar{\underline{\mathrm{f}}}\,\cos(\omega_i t)$$

Poiché ω è una pulsazione propria del sistema non smorzato si ha che $(\underline{K} - \omega_i^2\underline{M}) = \bar{0}$,tale effetto lo si nota solo ai modi propri.

Si vede come il supporto elastico e quello inerziale si elidono tra loro, così che rimangono solo lo smorzamento e la forzante. Moltiplicando e dividendo entrambi i membri per $\underline{\hat{\mathrm{d}}}^\top$ (tale termine rappresenta un fattore di amplificazione del modo proprio nella soluzione associata), ricaviamo il coefficiente $a_i = \dfrac{\underline{\hat{\mathrm{d}}}^\top \underline{\mathrm{f}}}{\omega_i \underline{\hat{\mathrm{d}}}^\top \underline{\underline{\mathrm{C}}}\, \underline{\hat{\mathrm{d}}}_i}$.

Si nota subito come indipendentemente dallo smorzamento questo coefficiente può essere nullo, questo perchè il numeratore risulta essere nullo quando il prodotto scalare è nullo, cioè quando i due vettori sono ortogonali, quindi avremo ampiezze a_i nulle.

Si riprenda l'esempio del diapason che è una struttura perfettamente simmetrica.



I modi propri delle strutture perfettamente simmetriche rispetto ad un piano si distinguono in due famiglie:

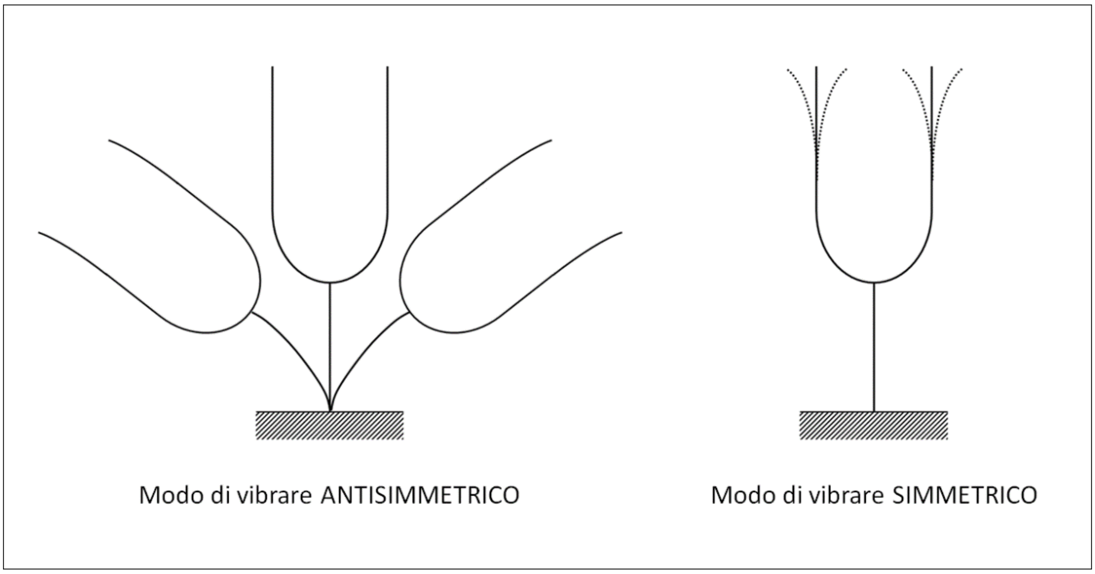
i modi simmetrici rispetto al piano e quelli antisimmetrici.

In particolare se una struttura ha tre piani di simmetria ci sono 8 famiglie di modi:

-modi simmetrici rispetto ai 3 piani;

-modi antisimmetrici rispetto ai 3 piani;

-modi misti.



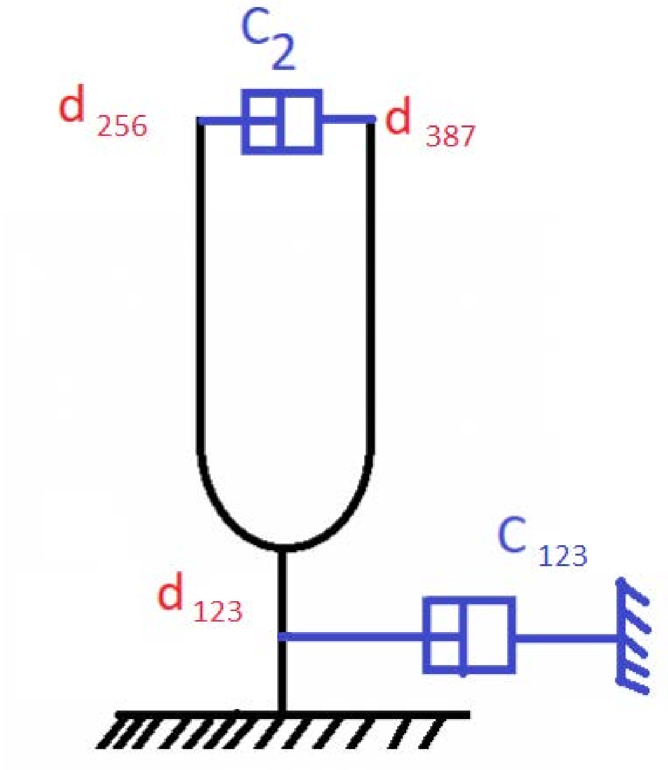
Si nota come nel caso di sollecitazioni antisimmetriche su di un modo simmetrico si ha che il prodotto scalare tra le grandezze in considerazione risulta essere nullo. Quindi una forzante antisimmetrica non può eccitare un modo simmetrico e viceversa.

Se il diapason lo costruisco con un braccio più corto dell’altro, la struttura non è più perfettamente simmetrica, dunque non si avranno più modi perfettamente simmetrici o antisimmetrici. Le sollecitazioni non saranno quindi perfettamente ortogonali al modo e il prodotto scalare non sarà esattamente nullo.

Se il denominatore è nullo e il numeratore risulta essere prossimo allo zero allora avremo ampiezze a_i tendenti ad infinito.

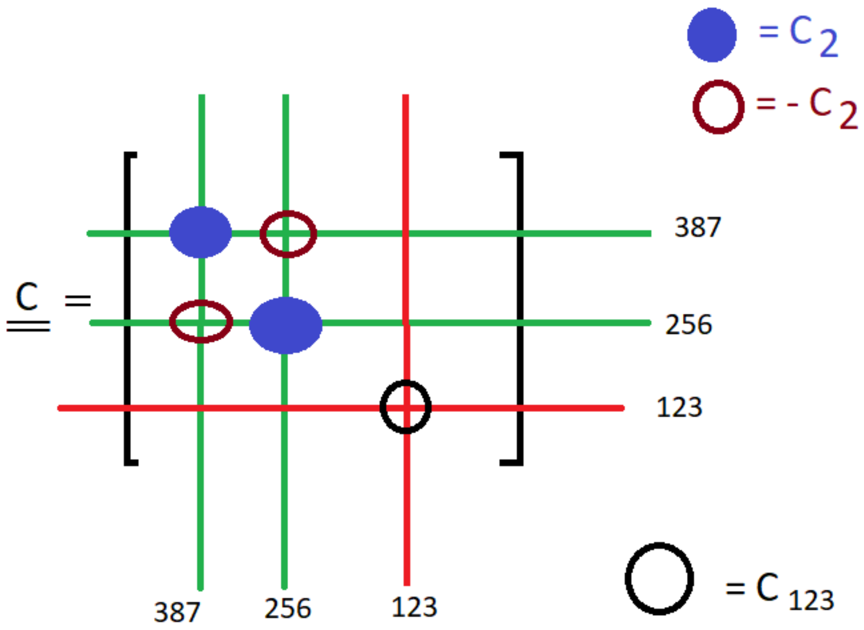
La singolarità di a_i può essere esclusa se alla matrice smorzamento non gli sono associate reazioni viscose o ortogonali al modo proprio oppure se la sollecitazione non è ortogonale al modo proprio della struttura.

Si fa l'esempio del denominatore nullo nonostante la matrice smorzamento non sia nulla:



Abbiamo un diapason sul quale installiamo un dispositivo smorzante sia sullo stelo che sulle estremità dei due bracci. Gli smorzatori agiscono a fronte di un moto in direzione orizzontale. Si analizzano due casi:

1) Si considera per primo solo ed esclusivamente lo smorzatore C123. Si vede per prima un modo simmetrico dove si annulla lo spostamento orizzontale. Il vettore in corrispondenza del grado di libertà U123 del nodo d123, avrà uno zero. Il modo proprio prevede uno spostamento nullo al punto in cui viene agganciato lo smorzatore che quindi non lavora secondo tale modo proprio. Il diapason quindi può continuare a vibrare nonostante ci sia il dispositivo viscoso. Lo smorzatore si dice essere disaccopiato rispetto al modo proprio. Nel caso di modo antisimmetrico invece il prodotto dei vettori non risulta essere nullo. Lo smorzatore pertanto è in grado di dissipare il modo proprio. Il modo antisimmetrico si esaurisce mentre permane quello simmetrico. Pertanto il denominatore può essere nullo anche nel caso di matrice smorzamento non nulla. Nella matrice smorzamento, si vedrà come unico termine non nullo, quello all’incrocio tra riga e colonna associati a U123.
2) Ora invece si considera anche uno smorzatore alle estremità dei bracci, questo risulta essere accoppiato al modo simmetrico e non a quello antisimmetrico. Lo si evita comunque perché non farebbe funzionare il diapason.



Se ci si pone nella condizione di risonanza, supponendo che l'eccitante pulsi con la frequenza propria del modo, si sostituisce una sollecitazione che è legata a un moto secondo un modo proprio, spariscono il supporto elastico e quello inerziale alla forzante, e rimane solo il supporto viscoso (se c'è). Ciò che si ottiene è che l'ampiezza è legata solo alla forma viscosa. Se non c'è forma viscosa l'ampiezza tende a infinito. L'unica via per cui l'ampiezza tende a infinito è che il denominatore sia nullo, ma si tratta come si è visto di una condizione particolare.

Ritornando alla risposta armonica, si sono quindi estratti tutti i modi propri della struttura. Esiste una modalità di operazione tale per cui si alleggerisce il calcolo della risposta in frequenza, alla quale conviene ricorrere soprattutto quando la struttura risulta essere complessa.

Ci si pone dunque nella condizione in cui tutti gli autovalori sono distinti, si ha quindi molteplicità pari a 1 per ognuno di questi. In tal caso si prende un autovettore j-esimo e un autovalore i-esimo e questi non sono ortogonali. Sono ortogonali nel caso in cui si inserisce la matrice massa e rigidezza, in generale però l'ortogonalità non è garantita.

Piuttosto si ha che $\hat{d}$ è ortogonale alle forze inerziali se il sistema si muove rispetto all'autovettore j-esimo.

Gli autovettori sono tutti linearmente indipendenti gli un dagli altri, e sono invece ortogonali rispetto alle matrici massa e rigidezza.

$$\underline{\hat{\mathrm{d}}}_j^\top \underline{\underline{\mathrm{M}}}\, \underline{\hat{\mathrm{d}}}_i = m_i \delta_{ij} \qquad\qquad \underline{\hat{\mathrm{d}}}_j^\top \underline{\underline{\mathrm{K}}}\, \underline{\hat{\mathrm{d}}}_i = m_i \omega_i^2 \delta_{ij}$$

Dove il "delta di Kroneker" è uguale a 1 se considero i≠j, se considero i=j allora il delta sarà 0.

Si aggiunge adesso un grosso vincolo: si assume che sia lecito descrivere la deformazione del copro elastico come un sottoinsieme dei modi propri.

Se usassi tutti i modi propri sarebbe semplicemente come un cambio di base perché descrivo le deformate in campo elastico come lo spostamento del primo grado di libertà per un vettore che ha 1 al primo termine e 0 in tutte le altre posizioni, più il secondo grado di libertà per un vettore che ha solo il secondo termine pari a 1 e tutti gli altri 0. Dove e1 e2 ecc. costruiscono una base delle possibili deformazioni.

Se si estraggono tutti i gli “n” autovettori e li uso per definire una configurazione del sistema si descrive una configurazione tramite una diversa base. Si utilizza un sistema di coordinate diverso perchè il passaggio da una base nodale a una modale è semplicemente un cambio di coordinate. Si fa però un passaggio in più perché nell’analisi trattata sono presenti 147 nodi, ognuno con 6 gradi di libertà.

In Marc si prendono solo i primi (ad esempio) 40 modi, perché è esagerato e molto lungo analizzare tutti i modi propri della struttura, però è possibile che si perda qualche possibile deformazione.

Si assume di poter descrivere la deformata del sistema come una combinazione lineare di un piccolo sottoinsieme dei modi propri dinamici, cioè si vieta alla struttura di muoversi secondo tutti gli altri modi. Ciò si fa vincolandola implicitamente. Se si definisce la soluzione comecombinazione dei primi “n” modi propri quando il sistema ha “m” gradi di libertà, si mettono dunque m-n vincoli.

Tale assunzione può essere pensata in forma di equivalenti. Da una parte si dice che il sistema si possa muovere secondo tutti i modi propri però quelli che non considero sono trascurabili. Si ignorano quindi tutti i modi che non sono stati considerati nell’analisi.

Dall’altra parte si può immaginare un set di vincoli cinematici che impedisce rigidamente ogni modo supplementare del sistema rispetto a quelli considerati. Il sistema risulta quindi ipervincolato. Si tratta di vincoli cinematici interni.

Se si utilizza la seconda spiegazione si assume che ci sono delle reazioni vincolari, infatti se solo qualcosa tendesse a deformare la struttura secondo un modo trascurato un vincolo applica una reazione vincolare per mantenere lo spostamento nullo.

Si ricorda che il vincolo è liscio, le reazioni vincolari sono ortogonali rispetto agli spostamenti. Quindi si definisce un sottoinsieme dei primi “m” autovalori (non è l’unica scelta, ad esempio a volte si prendono i nodi propri entro un certo range di frequenze).

Per verificare che gli “n” modi siano sufficienti, espando il set e vedo se cambia qualcosa.

Ad esempio, si ha un eccitante a 200 Hz. Si prendono i modi propri che vanno da 0 a 400 Hz. Poi da 0 a 500 Hz e poi da 0 a 600 Hz. Se l’ultimo range dà risultati identici al primo allora vuol dire che il primo è sufficiente.

In assenza delle soluzioni esatte purtroppo bisogna fare tale iterazione, non ci sono teoremi esatti.

La pratica ingegneristica, ad esempio, ammette che se la forzante è a una certa frequenza, si prendono i modi fino al 150% - 200% di quella frequenza.

A questo punto definito il sottoinsieme degli “m” autovalori si inseriscono in una matrice:

$$\underline{\underline{\Xi}} = \left[\underline{\hat{\mathrm{d}}}_1 \quad \cdots \quad \underline{\hat{\mathrm{d}}}_l \quad \cdots \quad \underline{\hat{\mathrm{d}}}_m\right],$$

Si tratta di una matrice rettangolare che ha tante righe quanti sono i gradi di libertà del sistema e tante colonne quante gli elementi del sottoinsieme di modi propri scelti.

Qualsiasi configurazione del sistema viene ottenuta scalando per un fattore $\underline{\bar{\mathrm{d}}} = \underline{\underline{\Xi}}\,\underline{\bar{\xi}}$.

Si definiscono così le possibili configurazioni che si vanno a spaziare $\underline{\underline{\Xi}}^\top \underline{\underline{\mathrm{M}}}\,\underline{\underline{\Xi}} = \underline{\underline{\mathrm{I}}}$ $\qquad \underline{\underline{\Xi}}^\top \underline{\underline{\mathrm{K}}}\,\underline{\underline{\Xi}} = \underline{\underline{\Lambda}} = \mathrm{diag}(\omega_l^2);$

La prima equazione è una matrice diagonale con tutti i termini 1. La seconda è una matrice che ha in diagonale le pulsazioni i-esime al quadrato.

Purtroppo il prodotto di $\underline{\underline{\mathrm{C}}}$ e la matrice $\underline{\underline{\Xi}}$ non dà una matrice diagonale. Si ha dunque che $\underline{\underline{\mathrm{K}}}$ e $\underline{\underline{\mathrm{M}}}$ sono diagonalizzabili, mentre $\underline{\underline{\mathrm{C}}}$ non lo è. Si definisce allora $\underline{\underline{\mathrm{C}}}$ come combinazione di $\underline{\underline{\mathrm{M}}}$ e $\underline{\underline{\mathrm{K}}}$: $\underline{\underline{\mathrm{C}}} = \alpha\,\underline{\underline{\mathrm{M}}} + \beta\,\underline{\underline{\mathrm{K}}}$

Matrice di Rayleigh o di smorzamento proporzionale.