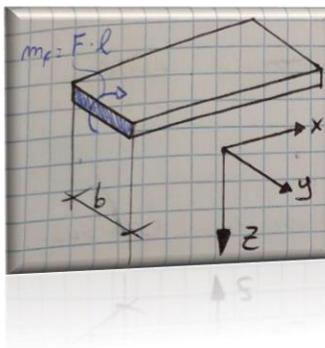
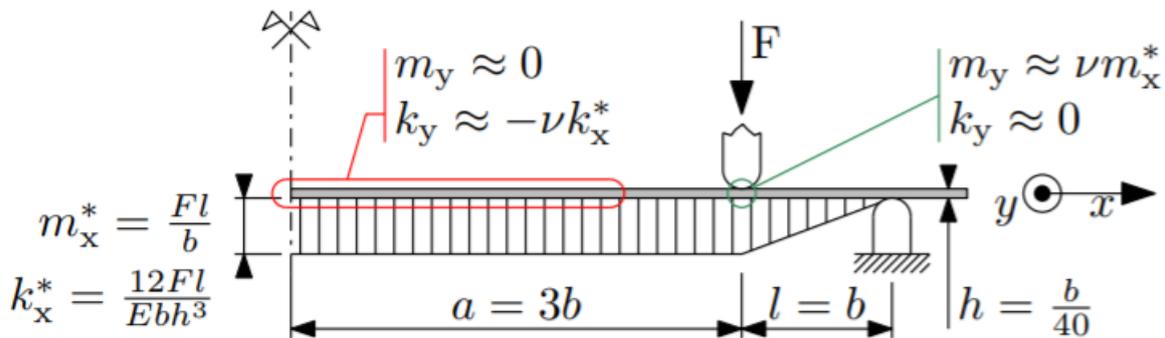


La prova a flessione a 4 punti consiste nel caricare una piastra su due appoggi fissi con due punzoni mobili. La struttura è simmetrica e di conseguenza se ne studia solo una metà.



Il lamierino in alto possiede delle seguenti caratteristiche geometriche:

spessore  $h$  pari ad  $1/40$  della larghezza  $b$  della piastra, la distanza fra gli appoggi fissi pari a  $8b$ , la distanza fra punzone ed appoggio fisso è pari ad  $l=b$  nel caso specifico, mentre la distanza fra i punzoni mobili è di  $6b$ .

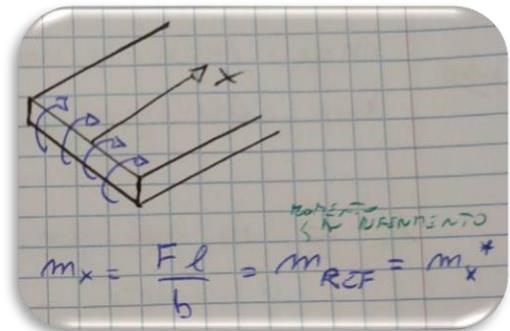
Tutto il tratto del provino compreso fra un punzone e l'altro è sottoposto ad un momento flettente costante per la *teoria della trave* pari a

$$m_f = F * l$$

N.B.: visto il sistema di riferimento con l'asse  $z$  che punta verso il basso si dice TOP la parte inferiore con le fibre tese e BOTTOM la parte superiore con le fibre in compressione, generando curvature positive.

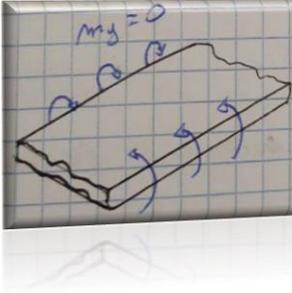
Considerando la struttura non più come una trave, ma come una PIASTRA, il momento flettente agente su una sezione qualunque compresa fra i 2 punzoni diventa un FLUSSO DI MOMENTO ossia un momento distribuito

$$m_x^* = \frac{F * l}{b}$$

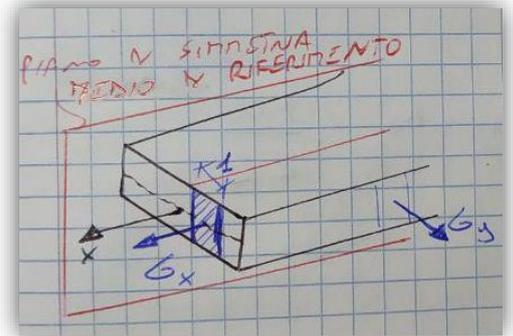


costante lungo la larghezza  $b$  della piastra. Questo momento  $m_x^*$  verrà chiamato momento di riferimento, in modo che i grafici saranno normalizzati

$$\frac{\text{momento al punto di sezione}}{\text{momento di riferimento}} = \frac{m_x}{m_x^*}$$



Per quanto riguarda il flusso di momento lungo l'asse  $y$  abbiamo  $m_y = 0$  in quanto non vi sono coppie applicate ai fianchi, nella condizione in cui si è a distanza dagli appoggi. In prossimità dei punzoni non è detto che sia nullo lungo  $y$ .



Tornando al momento flettente  $m_x$ , considero una sezione ortogonale all'asse  $x$  della piastra, ne prendo un tratto di estensione unitaria lungo  $y$  e considerando le tensioni  $\sigma_x$ ; successivamente calcolo il momento rispetto alla linea di intersezione della superficie media con quella di taglio della sezione, ottenendo:

$$m_x = \int_h \sigma_x * z * dz = \frac{F * l}{b} \neq 0$$

Le  $m_y$  risultano nulle su tutto il solido perché secondo la teoria della trave le  $\sigma_y$  entro sezione sono nulle.

$$m_y = \int_h \sigma_y * z * dz = 0$$

Il momento misto  $m_{xy}$  è nullo soprattutto per la simmetria dei carichi e dei vincoli presenti sulla struttura.

$$m_{xy} = \int_h \tau_{xy} * z * dz = 0$$

Utilizziamo questi flussi di momenti nella seguente equazione matriciale

$$\begin{pmatrix} \underline{q} \\ \underline{m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{A}} & \underline{\underline{B}} \\ \underline{\underline{B}}^T & \underline{\underline{C}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\bar{\epsilon}} \\ \underline{\bar{\kappa}} \end{pmatrix}$$

e in particolare consideriamo lo sviluppo del termine legato ad  $\underline{m}$ :

$$\mathbf{m} = \mathbf{B}^T \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{C} \mathbf{k}$$

Ipotizzando il materiale isotropo e omogeneo e poiché facciamo coincidere il piano di riferimento con il piano medio la matrice  $\underline{\mathbf{B}}^T = 0$ . Dunque l'equazione matriciale precedente si riduce come segue.

$$\begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{C}} * \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad ; \quad \underline{\mathbf{C}} = \frac{h^3}{12} \underline{\mathbf{D}}$$

Queste sono le tre equazioni che legano le componenti del momento alle curvature e che in questo caso si possono calcolare con *Maxima*:

```
--> kill(all);
(%o0)
--> D:
E/(1-nu^2).
matrix(
[ 1,nu, 0],
[nu, 1, 0],
[ 0, 0,(1-nu)/2]
);
(%o1)

$$\begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{E\nu}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{E\nu}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E(1-\nu)}{2E(1-\nu^2)} \end{bmatrix}$$

--> A: integrate(D,z,-h/2,h/2);
(%o2)

$$\begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{Eh\nu}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{Eh\nu}{1-\nu^2} & \frac{Eh}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Eh(1\nu)}{2(1-\nu^2)} \end{bmatrix}$$

--> B: integrate(D.z,z,-h/2,h/2);
(%o3)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

--> C: integrate(D.z^2,z,-h/2,h/2);
(%o4)

$$\begin{bmatrix} \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} & \frac{Eh^3\nu}{12(1-\nu^2)} & 0 \\ \frac{Eh^3\nu}{12(1-\nu^2)} & \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Eh^3(1-\nu)}{24(1-\nu^2)} \end{bmatrix}$$

```

A questo punto definisco i vettori colonna contenenti le componenti membranali delle deformazioni, delle curvatures, del flusso degli sforzi e del flusso dei momenti:

```
--> e:matrix([ex],[ey],[gxy])$
k:matrix([kx],[ky],[kxy]);
q:matrix([qx],[qy],[qxy])$
m:matrix([mx],[my],[mxy])$
(%o6) [ kx
      [ ky
      [ kxy
```

```
--> m - B.e - C.k;
eqns:list_matrix_entries(%);
(%o9) [ - E*h^3*ky*nu - E*h^3*kx
      [ 12*(1-nu^2) 12*(1-nu^2) + mx
      [ - E*h^3*kx*nu - E*h^3*ky
      [ 12*(1-nu^2) 12*(1-nu^2) + my
      [ mxy - E*h^3*kxy*(1-nu)
      [ 24*(1-nu^2)
```

(N.B. l'equazione matriciale è stata scritta sotto forma di residui e raccolta in una lista per poter essere risolta con comando "linsolve")

```
(%o10) [ - E*h^3*ky*nu - E*h^3*kx
      [ 12*(1-nu^2) 12*(1-nu^2) + mx , - E*h^3*kx*nu - E*h^3*ky
      [ 12*(1-nu^2) 12*(1-nu^2) + my , mxy - E*h^3*kxy
      [ 24*(1-nu^2)
```

momenti e curvatures nominali di riferimento

```
--> mref:F*l/b;
(%o11) F*l
      b
--> kref:12*F*l/E/b/h^3;
(%o12) 12*F*l
      E*b*h^3
```

caso a curvatura ky imposta

```
--> null_ky:[mx=mref,ky=0,mxy=0];
(%o13) [mx = F*l/b, ky0, mxy0]
--> null_ky:append(
      null_ky,
      linsolve(ev(eqns,null_ky),[kx,my,kxy])
      );
```

```
(%o14) [mx = F*l/b, my = 0, mxy = 0, kx = - (12*F*l*nu^2 - 12*F*l) / (E*b*h^3), my = F*l*nu/b, kxy =
      0]
```

risultati

```
--> fullratsimp(
      ev(
      [mx,my,mxy]/mref, null_ky));%,nu=0.3;
```

```

(%o15) [1, v, 0]
(%o16) [1,0.3,0]
-->      fullratsimp(
          ev(
            [kx,ky,kxy]/kref, null_ky));%,nu=0.3;
(%o17) [1-v^2, 0,0]
(%o18) [0.91,0,0]
caso a curvatura ky libera, my
nullo
-->      null_my:[mx=mref,my=0,mxy=0];
(%o19) [mx =  $\frac{Kl}{b}$ , my = 0, mxy = 0]
-->      null_my:append(
          null_my,
          linsolve(ev(eqns,null_my),[kx,ky,kxy])
        );
(%o20) [mx =  $\frac{F*l}{b}$ , my = 0, mxy = 0, kx =  $\frac{12*F*l}{E*b*h^3}$ , ky =  $-\frac{12*F*l*nu}{E*b*h^3}$ , kxy = 0]
risultati
-->      fullratsimp(
          ev(
            [mx,my,mxy]/mref , null_my));%,nu=0.3;
(%o21) [1,0,0]
(%o22) [1,0,0]
-->      fullratsimp(
          ev(
            [kx,ky,kxy]/kref , null_my));%,nu=0.3;
(%o23) [1, v, 0]
(%o24) [1,0.3,0]

```

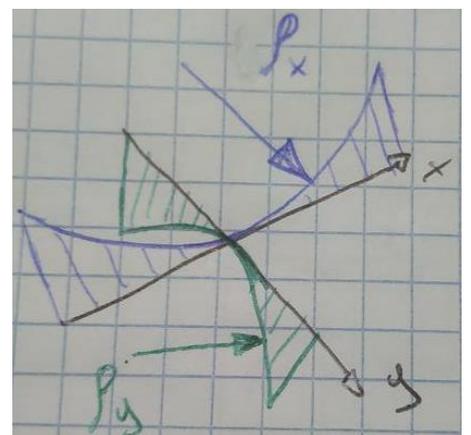
Definiamo curvatura di riferimento  $k_{ref}$  (principale) calcolata secondo la teoria della trave:

$$\frac{1}{\rho_x} = k_{ref} = k_x^* = \frac{Fl}{EJ}$$

Dal codice Maxima, si ricava che, se  $m_y=0$ , la curvatura in y non è nulla e può essere espressa in funzione della curvatura di riferimento.

Si nota che il rapporto fra  $k_y$  e  $k_{ref}$  sia uguale al coefficiente di Poisson a meno del segno, il che vuol dire che questa curvatura secondaria è opposta rispetto a  $\rho_x$ .

$$\frac{1}{\rho_y} = k_y = -\nu * k_x = -0.3k_x$$

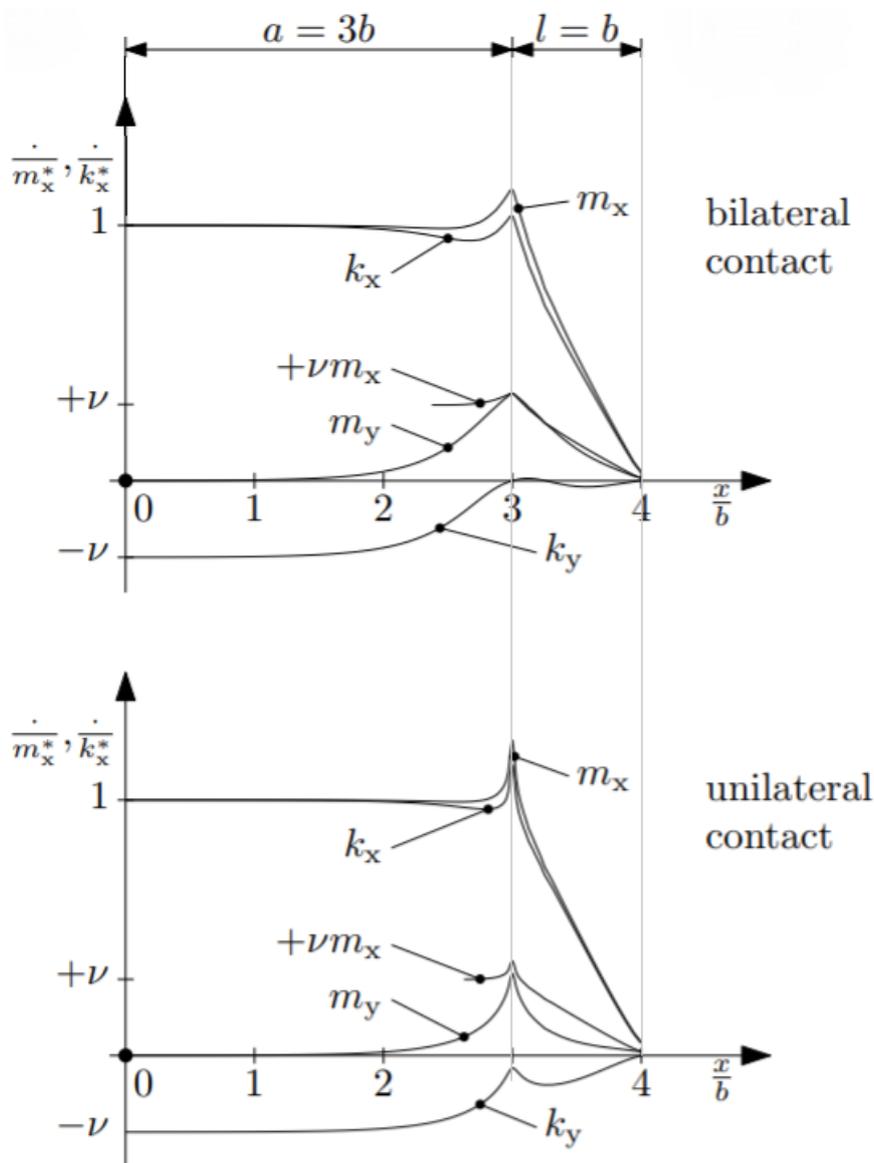


Di fatto con queste curvature si crea una deformazione a sella su tutto il tratto utile del provino.

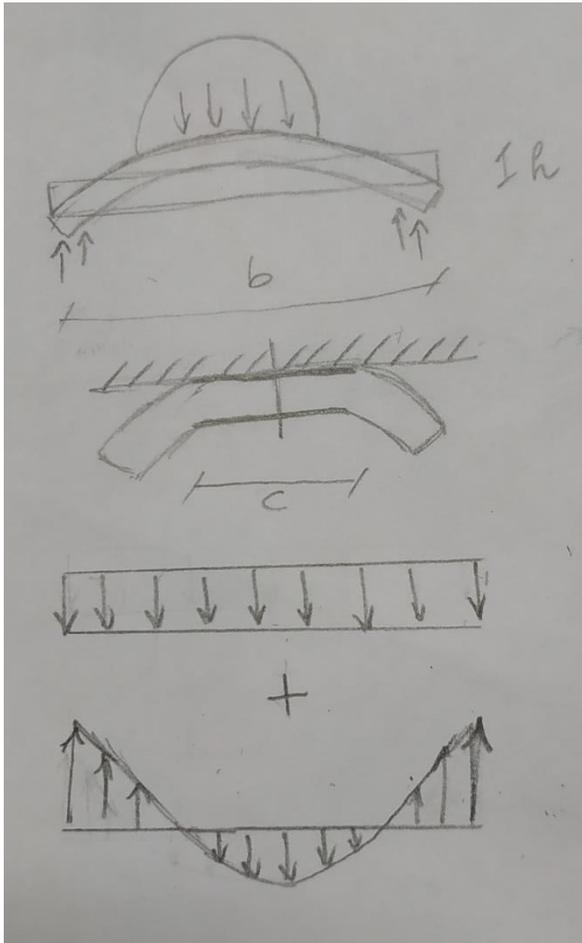
In prossimità degli appoggi possiamo impostare un sistema diverso dal precedente imponendo che la curvatura  $k_y$  sia nulla e il flusso di momento  $m_y$  sia diverso da zero, ottenendo

$$m_y = m_{ref}^* * \nu$$

e si avrà una deformazione un po' più complessa in base al tipo di contatto se *unilaterale o bilaterale*.



Gli andamenti dei flussi di momento  $m_x$ ,  $m_y$  sono normalizzati su un flusso di momento di riferimento, mentre quelli relativi alle curvature sono normalizzati rispetto alla curvatura di riferimento.



Come si nota dal grafico gli andamenti di  $m_x$  e  $k_x$  partono dal valore 1 in mezzeria e inoltre  $m_y$  è nullo. All'altezza dell'appoggio mediano si ha una  $m_y$  circa pari a  $v$ ; moltiplicando invece  $m_x$  per  $v$  ( $v = 0.3$ ), cioè scalandolo del 30% si ottiene una curva  $v * m_x$  molto vicina a  $m_y$  in corrispondenza dell'appoggio mobile per il contatto unilaterale, mentre per quello bilaterale coincidono.

In prossimità dell'appoggio mobile la deformata di sezione avrà una forma con concavità verso l'alto; immaginando il punzone scendere gradualmente, esso tenderà a schiacciare man mano la parte centrale di curvatura generando una pressione di sovraccarico che costituirà a sua volta un flusso  $m_y$ .

Questo sovraccarico tende a ridurre la curvatura secondaria con un'azione neutra

che può essere completamente compensata se il contatto fra punzone e lamina avviene su tutta la larghezza della lamina, ma in realtà solo la parte centrale di quest'ultima risulta in contatto con il punzone.

Quindi tale pressione avrà una distribuzione parabolica in cui lamina nella zona di contatto sarà piatta su una certa larghezza "c" minore dell'intera dimensione della piastra. I flussi  $m_y$  ed  $m_x$  sono stati misurati nella zona di contatto considerato bilaterale, nel quale  $k_y$  è perfettamente nullo.

Se impongo nel FEM un contatto unilatero, il punzone non è in contatto con tutta la piastra ma solo con un punto di essa e quindi potrebbe esserci un gioco; inoltre, se il contatto è quasi puntiforme, il calcolatore non riesce ad imporre una curvatura nulla.

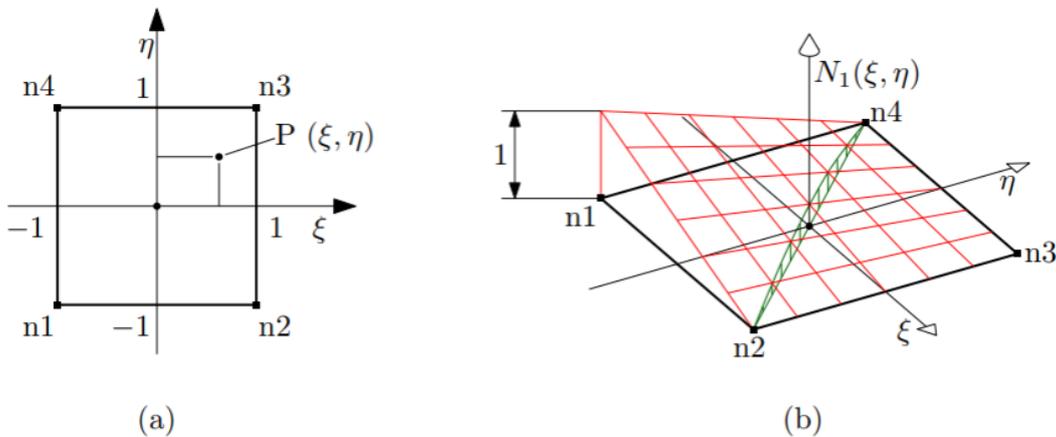
Infatti nella realtà il punzone mobile tocca il provino quasi solo in un punto, altrimenti risulta un contatto recessivo.

## **FINE TEORIA DELLE PIASTRE**

-----

## TEORIA DEGLI ELEMENTI FINITI

FUNZIONI DI INTERPOLAZIONE SU UN QUADRILATERO ELEMENTARE DI RIFERIMENTO. Il dominio quadrilatero elementare è costruito su un piano adimensionale di coordinate  $\xi$ - $\eta$ , ha 4 nodi a distanza unitaria dagli assi dislocati alle coordinate  $(\pm 1; \pm 1)$ . Su questo definisco l'interpolazione di una generica funzione.



Per definire la funzione di interpolazione  $f(\xi, \eta)$  andiamo a selezionare un set di funzioni di influenza nodale “ $N_i$ ” (funzioni peso o di forma), una per ogni nodo, come coefficienti di una media mobile pesata:

$$f(\xi, \eta) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i N_i(\xi, \eta) f_i$$

Dove  $f_i$  sono i coefficienti associati al set di punti nodali  $P_i$  che nel presente caso coincidono con i vertici del quadrilatero  $f_1, f_2, f_3, f_4$ .

I requisiti per queste funzioni peso sono:

- l'influenza del nodo è unitaria nel posto in cui quel nodo è dislocato, mentre l'influenza degli altri nodi è nulla altrove.

$$N_i(\xi_j, \eta_j) = \delta_{ij}$$

Dove la  $\delta_{ij}$  è la funzione delta di Kronecker

- per ogni punto del dominio la somma dei pesi è unitaria.

$$\sum_i N_i(\xi, \eta) = 1 \quad \forall \xi, \eta$$

Inoltre le funzioni devono essere continue e derivabili, per cui l'ideale possono essere quelle di tipo polinomiali del secondo ordine. In particolare per lo specifico dominio quadrilatero le funzioni di forma sono definite nel seguente modo:

$$N_i(\xi, \eta) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{4}(1 \pm \xi)(1 \pm \eta)$$

il segno va scelto in base allo specifico nodo, ad esempio nel nodo 1:

$$N_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) = \frac{2 * 2}{4} = 1$$

Questa legge di interpolazione può interpolare con errore nullo una generica funzione con andamento lineare lungo gli assi  $\xi, \eta$ . Se, invece, non impongo la complanarità si utilizzerà un sottoinsieme di funzioni quadratiche. In generale ci si accorge che la funzione non è lineare lungo le diagonali ma è parabolico per cui è presente un termine quadratico.