

# VINCOLI

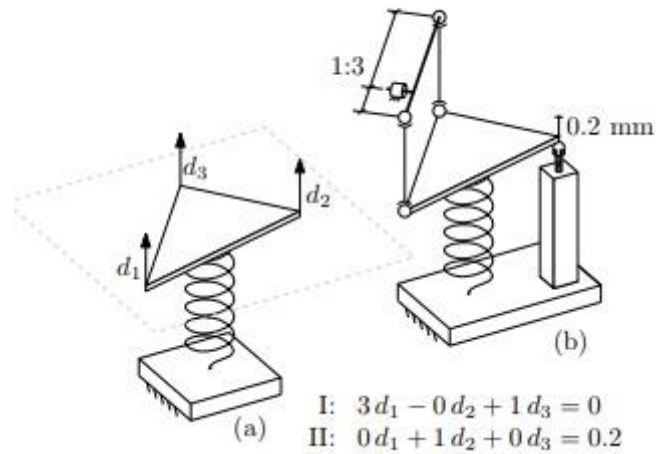


Figura 1

Preso il sistema semplificato (fig.1) in figura, di questo si vogliono studiare le reazioni vincolari e le configurazioni ammissibili che hanno dato luogo a questi due grafici (fig.2 e fig.3)

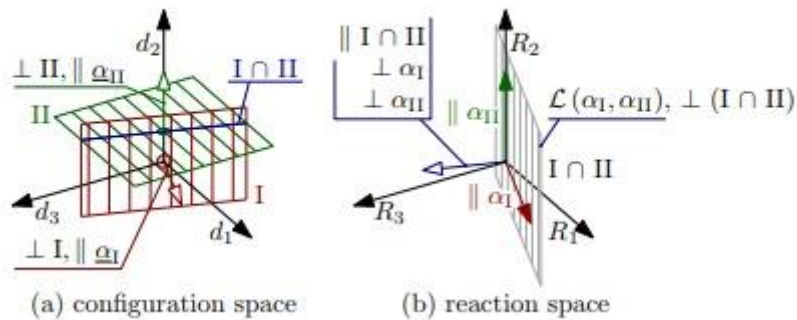


Figura 2

Figura 3

Si può notare che sono presenti due vincoli, il primo vincolo blocca il grado di libertà 2 ed ha un valore fisso fornito dal piano verde nel grafico delle configurazioni ammissibili in fig.2, mentre il secondo vincolo crea una leva tra due nodi, dal rapporto dei bracci di quella leva trovo l'inclinazione del piano rispetto all'asse  $d_3$ .

Nel caso vengano considerati entrambi i vincoli si ottiene la  $I \cap II$ . Si può vedere inoltre che, se si vuole il vincolo liscio, si deve compiere lavoro nullo su tutti gli spostamenti virtuali nell'intorno della configurazione.

Si può definire per ogni piano un vettore normale, ad esempio, parallelo al vettore normale del piano nello spazio delle configurazioni in rosso, possiamo definire il vettore  $\alpha_1$  nel piano delle reazioni vincolari.

La reazione vincolare associata al vincolo 1 è un set di forze generalizzate che ha libertà nodali, che per rispettare l'ortogonalità deve essere multipla di  $\alpha_1$ . Si può procedere analogamente con il vincolo 2, e sommando questi due contributi si ottiene un piano che è combinazione lineare di  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , tale piano rappresenta tutte le reazioni vincolari possibili ed è ortogonale a  $I \cap II$ .

Di conseguenza resterà solo un grado di libertà indipendente, si può individuare arbitrariamente il grado di libertà dipendente dalle equazioni I e II in fig.1, ad esempio  $d_3$ , a cui verrà quindi assegnato un valore, in tal caso  $-3d_1$ .

A questo punto si può procedere con la definizione della formulazione generale, distaccandosi dall'esempio visto in precedenza.

Nella formulazione generale consideriamo  $m$  vincoli, un grado di libertà reso dipendente "tied" (legato), che viene visto come la sommatoria di termini legati agli altri gradi di libertà, quelli indipendenti e trattati come le incognite del problema ossia "retained". Un grado di libertà di tipo tied è definito come combinazione lineare dei retained più eventuali termini non omogenei:

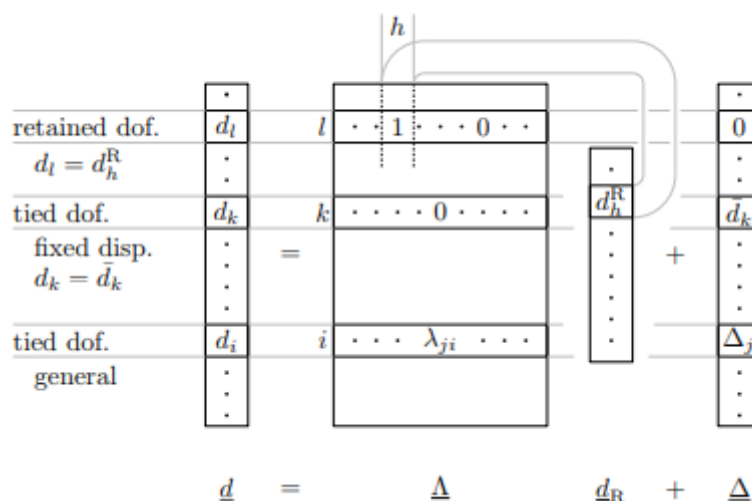
$$d_j = \sum_{d_i \in \underline{d}_R} \lambda_{ji} d_i + \Delta_j$$

A questo punto risulta utile costruire il vettore dei tied e dei retine, sarà quindi necessario prima costruire un vettore di  $m$  righe, ognuna contenente un grado di libertà e assegnare un posto a quest'ultimo nel vettore dei tied nel caso in cui si abbia un'equazione che lo definisca. Il grado di libertà altrimenti verrà collocato nel vettore retained. Una volta analizzati gli  $m$  gradi di libertà del sistema è stato estrapolato un vettore di  $m-n$  termini retained  $\underline{d}_R$ .

La formulazione generalizzata può essere quindi scritta attraverso una formula cumulativa in cui si definiscono i gradi di libertà globali:

$$\underline{d} = \underline{\Lambda} \underline{d}_R + \underline{\Delta}$$

Che è uguale a una matrice che ha tante righe, tante colonne quanti i gradi di libertà di tipo retained, la chiamo matrice  $\Lambda$  per il vettore dei gradi di libertà retained più un vettore che contiene tutti i termini non omogenei  $\Delta$ . Ovviamente questi sono  $m - n$  termini. Per dare un senso alle matrici  $\Lambda$  e  $\Delta$  è stato fornito il seguente esempio:



I gradi di libertà globali sono stati divisi in due tipi e il secondo tipo diviso in due. Ci sono i gradi di libertà dichiarati dipendenti, ogni riga di questa matrice  $\Lambda$  è legata ai gradi di libertà globali, che può essere tied o retained, ogni colonna è moltiplicata nelle sommatorie implicite nel prodotto matrice-vettore, ogni colonna

è legata a un termine retained. Supponiamo che l'n-esimo gradi di libertà sia di tipo retaneid, ovvero indipendente, allora sicuramente lo stesso avrà un corrispettivo sui 7 gradi di libertà dipendenti e si deve semplicemente inserire la relazione identità dove l'n-esimo gradi di libertà coincide con il k-esimo gradi di libertà degli indipendenti. Quindi scriviamo questa relazione

$$d_l = d_h^R$$

Ora passiamo a gradi di libertà tied (dipendenti), che possono essere di due tipi:

1. I vincoli di spostamento imposto
2. Un vincolo cinematico relativo (leva)

Prendiamo ora in considerazione il caso particolare di gradi di libertà vincolati per spostamenti imposti. Al k-esimo grado di libertà globale è imposto il salto a un valore di  $\overline{d_k}$  (valore fisso=0.2 mm). Dobbiamo scrivere in questa relazione che  $d_k = 0.2 \text{ mm} = \overline{d_k}$ . Allora bisogna scrivere semplicemente sulla k-esima riga della matrice  $\Lambda$  una fila di zeri che fornisce l'informazione che il gradi di libertà preso in considerazione non dipende da nessuno degli altri.

I gradi di libertà di libertà vincolati, in senso generale, saranno  $d_i = \sum(\Lambda_{ij} * \delta d_R)$ . La matrice  $\Lambda$  è una matrice sparsa tranne che nelle righe in cui ci sono queste dipendenze lineari se ci sono tanti coefficienti diversi da zero. Ora si può semplicemente scrivere che

$$\underline{d} = \underline{\Lambda} \underline{d}_R + \underline{\Delta}$$

Per avere un vincolo liscio il prodotto scalare tra la j-esima colonna di  $\Lambda$  e il vettore di forza di reazione R deve essere uguale a 0, che può essere scritto o in questo modo

$$\langle \underline{\Lambda}_j, \underline{R} \rangle = 0 \quad \forall j$$

Oppure così

$$\underline{\Lambda}^T \underline{R} = \underline{0}$$

Nella relazione sottostante si può definire  $\underline{K}$  come la matrice di rigidezza della struttura prima dell'applicazione di vincoli, questa matrice possiede un numero di righe quante colonne quanti gradi di libertà della struttura,  $\underline{d}$  è il vettore gradi di libertà globali, il prodotto  $\underline{K}\underline{d}$  definisce le forze che occorre applicare per mantenere tale struttura in una data configurazione deformata, nella formula seguente viene imposto che tali forze siano uguali a tutte le forze applicate, dove  $\underline{F}$  rappresentano le forze esterne e  $\underline{R}$  le reazioni vincolari:

$$\underline{K} \underline{d} = \underline{F} + \underline{R}$$

Questo rappresenta un sistema nelle incognite  $\underline{d}$

Se sono applicati vincoli è opportuno riscrivere l'equazione precedente sostituendo la formulazione generale e ottenendo quindi:

$$\underline{K} (\underline{\Lambda} \underline{d}_R + \underline{\Delta}) = \underline{F} + \underline{R}$$

Si vede un sistema di n-m incognite in n equazioni apparentemente, infatti le n incognite  $\underline{R}$  rendono il sistema di n equazioni in n incognite, sistema che altrimenti sarebbe sovradefinito.

Il termine  $\underline{\Delta}$  raccoglie degli spostamenti noti e quindi può essere moltiplicato per  $\underline{K}$  e spostato a destra, infatti  $(\underline{F} - \underline{K}\underline{\Delta})$  non è altro che un termine di forze dato che  $\underline{\Delta}$  scalato  $\underline{K}$  è la forza applicata per ottenere lo spostamento imposto.

$$\underline{K} \underline{\Delta} \underline{d}_R = (\underline{F} - \underline{K} \underline{\Delta}) + \underline{R}$$

Moltiplicando a sinistra per  $\underline{\Delta}^T$  si ottiene un sistema senza equazioni vincolari dato che per definizione  $\underline{\Delta}^T \underline{R} = 0$

$$\underbrace{\underline{\Delta}^T \underline{K} \underline{\Delta}}_{\underline{K}_R} \underline{d}_R = \underbrace{\underline{\Delta}^T (\underline{F} - \underline{K} \underline{\Delta})}_{\underline{F}_R} + \underbrace{\underline{\Delta}^T \underline{R}}_{=0}$$

Con  $\underline{K}_R$  matrice simmetrica soprannominata matrice di rigidità vincolata e  $\underline{F}_R$  proiezione delle colonne di  $\underline{\Delta}$  sul termine  $(\underline{F} - \underline{K}\underline{\Delta})$  detto vettore delle forze esterne del sistema vincolato. Il sistema si riduce a:

$$\underline{K}_R \underline{d}_R = \underline{F}_R$$

Fondamentalmente si scrive il sistema di equazione nella forma classica:

$$A * x = b$$

Dove A è la matrice di rigidità vincolata, x è il vettore dei gradi di libertà rimasti indipendenti e b è il vettore delle forze del sistema vincolato.

Si risolve questa equazione tramite la Cholesky decomposition ovvero traduciamo A come il prodotto tra una matrice triangolare inferiore che chiamo  $\underline{L}$  e una matrice triangolare superiore che è uguale a  $\underline{L}^T$ .

Quindi otteniamo

$$\begin{matrix} \square & \bullet & \begin{matrix} | \\ | \\ | \end{matrix} & = & \begin{matrix} | \\ | \\ | \end{matrix} \\ \begin{matrix} L \\ L^T \end{matrix} & & x & & b \end{matrix}$$

Questa decomposizione per una matrice piena costa proporzionale a  $n^3$ , dove n rappresenta i gradi di libertà, nel nostro caso n-m ovvero i gdl indipendenti. Se la matrice A è bandata e anche  $\underline{L}$  e  $\underline{L}^T$  sono bandate allora la Cholesky decomposition costa proporzionale a  $n * b^2$ , dove b è la banda, quindi se è bandato è meglio per la decomposizione.

Allora abbiamo

$$\underline{L} * \underline{L}^T * x = b$$

Dove questo pacco intermedio  $L^T * x$  lo si tratta come unico ed uguale a  $y$ .

Allora ora si deve risolvere il problema

The diagram shows a square matrix with a staircase pattern of zeros above the diagonal. The letter 'L' is in the bottom-left corner. To the right of the matrix is a dot, followed by a vertical rectangle labeled 'y', an equals sign, and another vertical rectangle labeled 'b'.

I termini della parte superiore sono tutti zeri. Ora questo problema si risolve con costo proporzionale ad  $n^2$ , ovvero molto più basso rispetto alla Cholesky decomposition, e si risolve sostanzialmente in questo modo:

il primo termine dell'incognita  $y_1$  è definita come  $b_1$  diviso il primo termine della diagonale della matrice L, una volta noto il primo valore posso procedere in cascata per il calcolo dei successivi, infatti  $y_2$  è uguale al termine noto  $b_2$  meno  $y_1$  moltiplicato per il coefficiente proprio della seconda riga della matrice, il tutto diviso il termine che moltiplica  $y_2$ , e così via. Una volta calcolato tutto il vettore  $y$ , passiamo al problema

The diagram shows a square matrix with a staircase pattern of zeros below the diagonal. The label 'L^T' is in the top-right corner. To the right of the matrix is a dot, followed by a vertical rectangle labeled 'x', an equals sign, and another vertical rectangle labeled 'y'.

Ora si procede come prima solo che si parte dal basso e si va verso l'alto. Tutto ciò è importante perché se si utilizza un solutore diretto (esistono due solutori: quello diretto, utilizzato per la Cholesky decomposition, e quello iterativo) si procede in questa maniera, ovvero si fa la Cholesky decomposition e poi le sostituzioni. Il grosso vantaggio è che se si ha più casi di carico, per esempio prima si applica una forza, poi delle forze diverse, in un sistema dove non cambia lo stato di vincolo dei gradi di libertà, ovvero non cambio il materiale, non cambio la forma, la struttura resta sempre la stessa, vincolata sempre nella stessa maniera, allora le proprietà elastiche degli elementi e lo stato di vincolo dei gradi di libertà confluiscono nella matrice A e si può recuperare la decomposizione di Cholesky fatta solo per il primo caso e riciclare per tutti gli altri casi, per questo la matrice A sarà sempre costante. Quindi per qualsiasi altro caso poi bisognerà semplicemente effettuare la parte delle sostituzioni e recuperare la prima matrice per tutti gli altri calcoli. Nei solutori iterativi si parte sempre da capo, ovvero per ogni caso bisogna partire dalla decomposizione.

Ora si è trovata la soluzione del problema in termini di  $d_R$ , ovvero gli spostamenti ai gradi di libertà indipendenti, scritta in termini di specifici spostamenti o rotazioni. Grazie a questo risultato si può derivare tutto il resto. Gli spostamenti a tutti i gradi di libertà si ricostruiscono dalla relazione dove tutti i termini sono noti:

$$\underline{d} = \underline{\underline{\Delta}} \underline{d}_R + \underline{\underline{\Delta}}$$

Per ricavare l'equazioni vincolari si torna alla forma dell'equazioni di equilibrio prima di moltiplicare per  $\Lambda^T$ , si sostituisce la soluzione e l'unico oggetto che resta incognito è  $\underline{R}$ . Quindi le reazioni vincolari sono uguali a  $\underline{K}^* \underline{d} - \underline{F}$  ovvero dalla seguente formula:

$$\underline{K} \underline{d} = \underline{F} + \underline{R}.$$

Mancano da calcolare le deformazioni e tensioni, però se si hanno gli spostamenti globali, vengono moltiplicati per la matrice P che deriva da essi, si trovano gli spostamenti al j-esimo elemento, moltiplicando questi spostamenti per le matrici  $b_0$  e  $b_1$  si ottiene deformazioni entro piano:

$$\underline{\epsilon} = (\underline{B}_{ej}^0(\xi, \eta) + \underline{B}_{ej}^1(\xi, \eta)z) \underline{d}_{ej}^*$$

e anche fuori piano

$$\underline{\gamma} = \underline{B}_{ej}^{\bar{\gamma}}(\xi, \eta) \underline{d}_{ej}^*,$$

Una volta note tutti questi dati moltiplico per le matrici dei legami costitutivi e trovo le tensioni.

## ANALISI DI RISPOSTA ARMONICA

L'equazione di equilibrio generale di un sistema con molteplici gradi di libertà è:

$$\underline{M} \ddot{\underline{d}} + \underline{C} \dot{\underline{d}} + \underline{K} \underline{d} = \underline{f}(t), \quad \underline{d} = \underline{d}(t)$$

Considerando  $\underline{M}$  e  $\underline{C}$  nulli ottengo l'equazione  $\underline{K}\underline{d}=\underline{f}(t)$  dove  $\underline{K}$  è la matrice di rigidità vincolata,  $\underline{d}$  sono i vettori spostamento e  $\underline{f}(t)$  i carichi esterni del sistema vincolato considerati variabili nel tempo. Si può notare come anche la soluzione vari nel tempo, se tale variazione avviene repentinamente possono comparire allora nell'equazione i termini inerziali e i termini dissipativi viscosi, di conseguenza l'equazione di equilibrio assume la forma descritta precedentemente dove:

- $\underline{M}$  è la matrice di massa vincolata, simmetrica e definita positiva;
- $\underline{C}$  è la matrice dei termini dissipativi viscosi, simmetrica e semidefinita positiva.

I termini inerziali saranno ovviamente proporzionali alle accelerazioni, i termini dissipativi viscosi alle velocità. Il termine legato alla matrice di massa è stabilizzante per i moti di corpo rigido residui, dato che questi sono ammessi in dinamica, la matrice  $\underline{M}$  è definita positiva perché non esiste nessun moto non nullo nel quale non ci siano azioni inerziali.

Si procede con l'assunzione che i sistemi sono lineari nella loro risposta dinamica poiché lo studio di sistemi non lineari risulterebbe troppo costoso e complicato, di conseguenza lo studio verrà focalizzato su soluzioni a lungo termine e non transitori, si assume inoltre che le forze applicate siano periodiche nel tempo e quindi si cercano soluzioni periodiche.

Naturalmente ogni funzione periodica può essere scomposta in una serie di Fourier, se si ha infatti una soluzione periodica non armonica, ad esempio un'onda quadra, si può studiare il sistema, considerato lineare, e quindi che gode del principio di sovrapposizione degli effetti, come se fosse soggetto ad una sola sollecitazione armonica e poi ricomporre la soluzione alla fine. La linearità del sistema però non è solo fondamentale per scomporre l'eccitante ma sancisce che a sollecitazione periodica si ottiene una risposta periodica, e non caotica.

Si utilizza la forma di esponenziale complesso a discapito di seni e coseni perché più compatta:

$$\underline{f}(t) = \frac{\bar{f} e^{j\omega t} + \bar{f}^* e^{-j\omega t}}{2} = \text{Re}(\bar{f} e^{j\omega t})$$

La forzante nel tempo allora potrà essere descritta da un vettore  $\underline{f}$  che ha tanti termini quanti gradi di libertà. Se si trascura la parte immaginaria si ottiene la seguente relazione:

$$\underline{f}(t) = \bar{f} e^{j\omega t}$$

Come ampiamente descritto in precedenza il sistema sottoposto ad una sollecitazione periodica restituisce una risposta periodica del tipo:

$$\underline{d}(t) = \bar{d} e^{j\omega t}$$

A questo punto si può sostituire nell'equazione generale le considerazioni fatte sulla forzante e sulla risposta (derivandola quando è opportuno), ottenendo:

$$(-\omega^2 \underline{\underline{M}} + j\omega \underline{\underline{C}} + \underline{\underline{K}}) \bar{d} = \bar{f}$$

Dopo aver semplificato il termine esponenziale si nota che il risultato è un sistema lineare di equazioni a coefficienti, incognita e termini noti complessi, con n gradi di libertà e n equazioni. Per bassi valori di  $\omega$  i termini inerziali e dissipativi viscosi possono essere trascurati, quindi a basse pulsazioni ci si aspetta una risposta in continuità con il caso statico.

Di solito però non si parte dalla risposta in frequenza, perché non sempre è necessaria. Infatti, a volte si capisce fin dall'inizio che la forzante varia nel tempo in maniera lenta, perciò si può evitare di fare la risposta in frequenza e si procede con il caso quasi statico. Trascurando le forze inerziali e le forze viscosi si risolve il problema e si sa che per bassi valori di pulsazioni quella risposta quasi statica verrà semplicemente modulata per il  $\sin(\omega t)$ . Per capire se si è sopra la soglia per applicare la risposta in frequenza o meno, bisogna fare un'analisi preliminare più economica, ovvero un'analisi ai nodi propri della struttura.

In dinamica le strutture possono avere moti non nulli anche in assenza di sollecitazioni esterne applicate istante per istante, infatti applicando una sollecitazione istantanea, il corpo continuerà a vibrare anche in assenza di altri input, affinché un moto perduri in assenza di una forzante bisogna che ci sia l'assenza di forze dissipative, ovvero non c'è azione viscosa, perché altrimenti prima o poi il sistema si ferma. In questo caso la matrice di smorzamento C è nulla. Sotto queste ipotesi la formula seguente

$$(-\omega^2 \underline{\underline{M}} + \underline{\underline{K}}) \bar{d} = \bar{f}$$

Diventa così

$$(-\omega^2 \underline{\underline{M}} + \underline{\underline{K}}) \bar{d} = \underline{0}$$

Questa è una equazione omogenea, per cui se il primo termine è nullo si trova la soluzione banale.

Può succedere che alcuni valori specifici di  $\omega$  vadano ad annullare il determinante del termine in parentesi, a questo punto il determinante di matrice del sistema si annulla, il rango cala da n a n-1 e quindi appaiono

soluzioni diverse dalle banali (ovvero  $\underline{d}=0$ ) e si ottiene tipicamente una sola soluzione. Nel corso della triennale però si è visto un problema leggermente diverso, ovvero il seguente:

$$(\underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{K}} - \omega^2 \underline{\underline{I}}) \underline{\underline{d}} = \underline{\underline{0}}$$

pre-moltiplicato per la matrice massa inversa. In realtà l'equazione era semplificata in questa maniera:

$$(A - \lambda I)v = 0 \text{ dove } A = M^{-1} * k \quad \text{e} \quad \lambda = \omega_1^2$$

Ha soluzioni non banali descritte da delle coppie  $(\lambda_i, v_i)$ , dove il primo termine è uno scalare detto autovalore e il secondo invece è un autovettore che ha molteplicità 1, se è diversa da 1 allora la forma completa diventerebbe  $(\lambda_i, \{v_i^j\}, m_i)$  con  $j=1 \dots m$ . Per ottenere tutti questi dati utilizziamo calcolatori come matlab.