

Elemento finito con vertici non complanari

Precedentemente quando è stato definito l'elemento quadrilatero generico nel piano fisico XY, tutti e quattro i vertici del suddetto quadrilatero si trovavano in tale piano. Difatti, le coordinate z_i (con $i=1,2,3,4$) dei quattro vertici sono state supposte nulle. Questo ha permesso di definire in maniera molto semplice la mappatura che consente di passare da uno spazio bidimensionale ad un altro. In realtà, nel passaggio dal sistema di riferimento globale a quello locale la mappatura interpola non solo le coordinate x e y ma anche la coordinata z dei quattro vertici del quadrilatero preso in esame. Non è stata supposta alcuna condizione che imponga la complanarità dei quattro vertici e quindi che le z_i (con $i=1,2,3,4$) siano nulle. A rigore la non complanarità dei quattro vertici non può essere consentita, tuttavia la si ammette solo nel caso i cui le coordinate z_i siano molto piccole, circa pari a zero. Per giustificare la limitazione sul valore della coordinata z viene presentato il seguente elemento distorto che è stato costruito nel modo seguente.

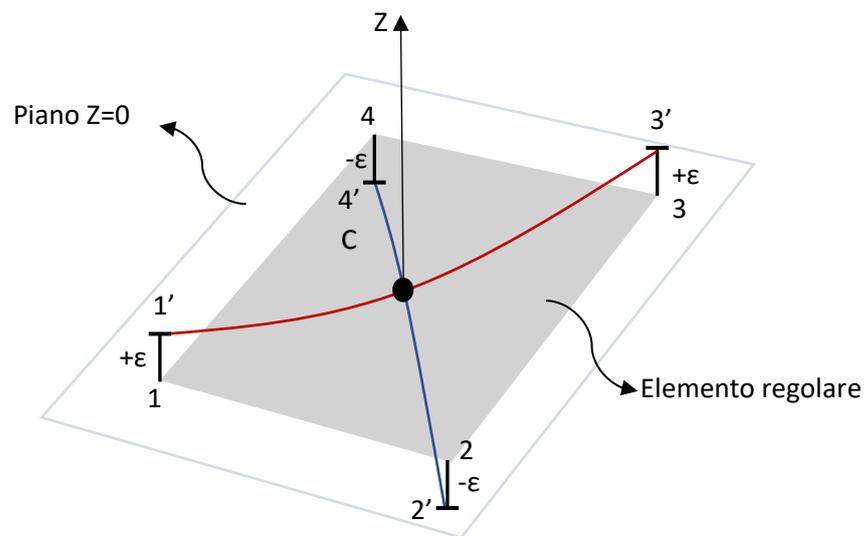


Figura 1

Consideriamo un elemento regolare, ad esempio un quadrato, i cui quattro vertici giacciono su un piano XY con $Z=0$ (figura 1). Fissiamo nel centroide C l'asse z con verso positivo uscente. Supponiamo che i nodi 1 e 3 si elevino di una quantità positiva $+\epsilon$, mentre i nodi 2 e 4 si abbassino della stessa quantità negativa $-\epsilon$. In questo modo non è più possibile costruire un piano passante per tutti e quattro i punti 1', 2', 3' e 4'. Infatti, ad esempio, il piano che passerebbe per i punti 2', 3', e 4' comporterebbe in 1' una quota pari a 2ϵ .

Valutiamo ora la coordinata z dei punti medi dei lati del quadrilatero e anche quella del centroide. L'interpolazione tra il vertice 2' e 3' (e tra il vertice 4' e 1') è lineare a ξ costante, per cui il punto medio del lato 2'3' (e del lato 4'1') si eleva come la media delle coordinate z degli estremi del lato, ovvero $+\epsilon$ e $-\epsilon$. Quindi, il punto medio avrà coordinata $z=0$. Lo stesso ragionamento può essere ripetuto per i punti medi dei lati 1'2' e 3'4'. Quindi, i quattro punti medi avranno tutti coordinata zeta nulla.

Allo stesso modo tutti i punti che appartengono al segmento congiungente il punto medio del lato 1'2' con quello del lato 3'4' e al segmento congiungente il punto medio del lato 1'4' con quello del lato 2'3' hanno

coordinata z nulla. Visto che il centroide C si trova all'intersezione tra i suddetti segmenti, anch'esso avrà coordinata $z=0$.

Valutiamo ora la coordinata z dei punti delle diagonali. I punti appartenenti alla diagonale congiungente i vertici $1'$ e $3'$ hanno coordinata z che varia da $+\epsilon$ a 0 per ritornare poi nuovamente a $+\epsilon$. Unendo tali quote si ottiene una curvatura con concavità verso l'alto (curva rossa in figura 1). Viceversa, i punti appartenenti alla diagonale che congiunge i vertici $2'$ e $4'$ hanno coordinata z che varia da $-\epsilon$ a 0 per poi ritornare a $-\epsilon$; unendo, allo stesso modo, tali quote si ottiene una curvatura con concavità verso il basso (curva blu in figura 1).

Questa distorsione che viola la complanarità è una doppia curvatura lungo le diagonali che crea una forma a sella detta anche curvatura anticlastica. Questo tipo di distorsione nella formulazione degli elementi finiti è omessa in quanto la superficie che si va a considerare è la sua proiezione sul piano. Visto che l'area della superficie con forma a sella è differente da quella della sua proiezione sul piano, nella formulazione degli elementi finiti c'è una perdita che è tanto maggiore quanto più ϵ è grande. Quindi, non c'è alcuna condizione che imponga la complanarità dei quattro nodi dell'elemento ma è chiaro che, se ci fosse, limiterebbe le quote z dei vertici a valori molto piccoli.

Nello studio degli elementi finiti le superfici curve non vengono escluse ma vengono analizzate suddividendole in tante piccole superfici piane con la possibilità di far variare il grado di orientazione così da poter rappresentare la curvatura della superficie. Quindi, possiamo dire che la teoria dei gusci negli elementi finiti coincide con quella delle piastre.

Sistema di riferimento globale e locale

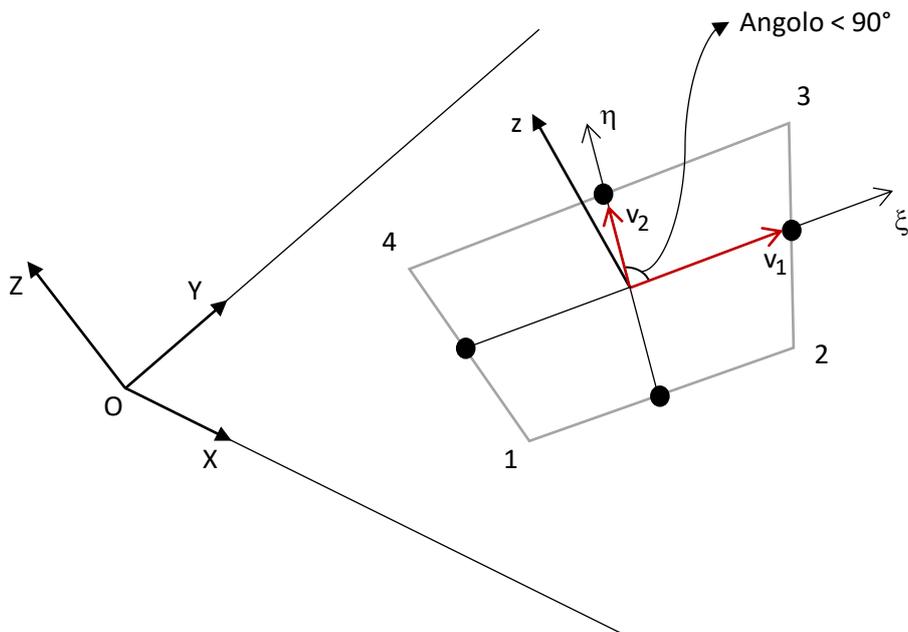


Figura 2

Il sistema di riferimento XYZ avente origine nel generico punto O è il sistema di riferimento globale che non è specifico per ogni elemento finito. Al contrario, il sistema di riferimento locale è relativo a ogni elemento finito che si intende studiare. Passiamo allora ad illustrare quale sia il metodo usato da Marc Mentat per individuare il sistema di riferimento locale necessario per lo studio dell'elemento rappresentato in figura 2.

L'asse z del sistema di riferimento locale è sempre normale all'elemento stesso e per semplicità si è scelto il centroide C come origine degli assi. Per poter individuare il centroide C è necessario dapprima stabilire quali siano gli assi ξ e η in quanto il centroide è l'immagine nel piano fisico XY dell'origine degli assi del piano naturale $\xi\eta$. Gli assi ξ e η avranno immagine nel piano fisico e, visto che la mappatura lungo i lati dell'elemento è bilineare, l'immagine dell'asse ξ passerà per i punti medi del lato 14 e 23, e allo stesso modo l'immagine dell'asse η passerà per i punti medi dei lati 12 e 34. Rimangono così definiti gli assi del sistema di riferimento naturale, quindi il centroide C di coordinate $\xi=0$ e $\eta=0$. L'asse z è definito come l'asse ortogonale sia a ξ che a η . Quindi se chiamiamo \mathbf{v}_1 il vettore che va dal centroide al punto medio del lato 23 e \mathbf{v}_2 il vettore che va dal centroide al punto medio del lato 34, la direzione dell'asse z viene individuata dal prodotto vettoriale tra i vettori \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 . L'asse z è stato quindi individuato e si suppone che il verso positivo sia quello uscente.

Passiamo ora ad individuare gli assi x e y. Come primo tentativo si sceglie x coincidente con ξ e y coincidente con η ma l'angolo compreso tra le immagini degli assi del sistema di riferimento naturale è diverso da 90° quindi questa non è una buona scelta per il sistema di riferimento locale. Si fissa allora la bisettrice dell'angolo individuato dagli assi ξ e η e si fanno ruotare intorno a z gli assi x e y finché non risulteranno essere ortogonali (figura 3).

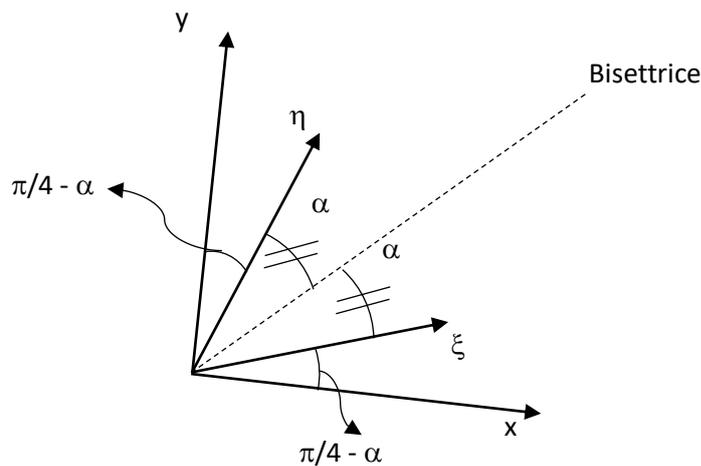


Figura 3

Solamente nel caso in cui l'elemento finito è un elemento regolare, come ad esempio un quadrato o un rettangolo, gli assi x e y coincidono con l'immagine degli assi ξ e η in quanto essi risultano già ortogonali. Sono stati così scelti i tre assi che costituiscono il sistema di riferimento locale xyz.

Campi di spostamenti e rotazioni

Consideriamo l'elemento finito generico e le funzioni note ai nodi f_i con $i=1,2,3,4$. La funzione in tutti i punti appartenenti all'elemento finito, individuati da precise coordinate ξ e η , è data dall'interpolazione:

$$f(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) f_i$$

Dove N_i sono le funzioni di forma.

In maniera analoga si può scrivere:

$$f(\xi, \eta) = \underbrace{[N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4]}_{\underline{N}} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}$$

Una volta definite le componenti degli spostamenti (u , v e w) e le componenti delle rotazioni (θ , φ e ψ) ai nodi è possibile, tramite interpolazione come nella formula precedente, calcolare il campo degli spostamenti e delle rotazioni in tutti i punti appartenenti all'elemento.

Ad esempio, gli spostamenti in direzione dell'asse x locale sono dati da:

$$u(\xi, \eta) = \underline{N} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}$$

Dove u_1 , u_2 , u_3 e u_4 sono gli spostamenti in direzione x ai nodi. Allo stesso modo è possibile definire le altre componenti di spostamento e rotazione:

$$\begin{bmatrix} u(\xi, \eta) \\ v(\xi, \eta) \\ w(\xi, \eta) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \theta(\xi, \eta) \\ \varphi(\xi, \eta) \\ \psi(\xi, \eta) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \begin{bmatrix} \theta_i \\ \varphi_i \\ \psi_i \end{bmatrix}$$

Si può notare che non c'è spazio di interpolazioni miste tra spostamenti e rotazioni, cioè sono disaccoppiati. Definiti gli spostamenti e le rotazioni, dai primi si estrarranno le tensioni membranali e dai secondi le curvature come si vedrà di seguito.

Deformazioni

Consideriamo ora le derivate parziali della generica funzione interpolata f:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} = \underbrace{\left(\underline{\underline{J}}^T \right)^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{L}}(\xi, \eta)} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}$$

Dove $\left(\underline{\underline{J}}^T \right)^{-1}$, la matrice 2x2 Jacobiana trasposta inversa, viene moltiplicata per una matrice, composta da due righe e tante colonne quanti sono i nodi, i cui elementi sono le derivate parziali delle funzioni di forma N_i rispetto a ξ e η , e per un vettore colonna costituito dalle funzioni note ai nodi. La matrice $\underline{\underline{L}}(\xi, \eta)$ è un operatore differenziale composto da 2 righe e 4 colonne che trasforma i valori delle funzioni ai nodi nelle derivate rispetto a x e a y . Si noti che la matrice $\underline{\underline{L}}(\xi, \eta)$ non è costante sull'intero elemento ma dipende dalle coordinate ξ e η di ciascun punto.

Se, ora, si sostituisce la generica funzione f con lo spostamento lungo x si ottiene:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} = \left(\underline{\underline{J}}^T \right)^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}$$

Per semplicità definiamo i vettori:

$$\underline{\underline{u}} = \begin{bmatrix} \vdots \\ u_i \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{v}} = \begin{bmatrix} \vdots \\ v_i \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{w}} = \begin{bmatrix} \vdots \\ w_i \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{\theta}} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \theta_i \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{\varphi}} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \varphi_i \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{\psi}} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \psi_i \\ \vdots \end{bmatrix}$$

E con lo stesso procedimento definiamo le derivate parziali dello spostamento lungo y :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \underline{\underline{L}}(\xi, \eta) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \underline{\underline{L}}(\xi, \eta) \underline{\underline{v}}$$

E così via per w , θ e φ . Si noti che è stata trascurata la variazione della rotazione ψ in quanto è una rotazione che non entra nella teoria della piastra poiché è la rotazione in direzione normale al piano tangente

dell'elemento, o circa tangente se si considera un elemento finito distorto. Questa rotazione nella teoria della piastra non genera deformazione e determina il cosiddetto moto di *Drilling*.

Raggruppando le derivate degli spostamenti entro piano, cioè solo lungo x e y possiamo scrivere la seguente notazione compatta:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{L}(\xi, \eta) & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{L}(\xi, \eta) \end{bmatrix}}_{\underline{Q}(\xi, \eta)} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

Dove $\underline{Q}(\xi, \eta)$ è l'operatore differenziale che lavora simultaneamente sulle componenti x e y degli spostamenti.

Allo stesso modo l'operatore lineare $\underline{Q}(\xi, \eta)$ opera sulle componenti x e y delle rotazioni come segue:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{bmatrix} = \underline{Q}(\xi, \eta) \begin{bmatrix} \theta \\ \varphi \end{bmatrix}$$

L'elemento finito che si intende studiare si muove, si deforma e si tensiona secondo le leggi della teoria della piastra. Quindi, riportando l'espressione delle deformazioni sul piano di riferimento si ha che:

$$\bar{\underline{\epsilon}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\epsilon}_x \\ \bar{\epsilon}_y \\ \bar{\gamma}_{xy} \end{pmatrix}$$

Dunque, le tre componenti di deformazione entro piano, ovvero le deformazioni membranali, sono date dalla composizione delle derivate parziali delle componenti di spostamento lungo x e y appena calcolate. Allo stesso modo possiamo esprimere le tre componenti di deformazione in funzione delle variazioni degli spostamenti nodali come segue:

$$\begin{bmatrix} \bar{\epsilon}_x \\ \bar{\epsilon}_y \\ \bar{\gamma}_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & +1 & +1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \underline{\underline{H}}^+ \underline{\underline{Q}}(\xi, \eta) \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

Quindi, noti gli spostamenti nodali è possibile calcolare in ogni punto dell'elemento finito le tre componenti delle deformazioni membranali.

Allo stesso modo, conoscendo le rotazioni ai nodi si possono ricavare le componenti di curvatura in ogni punto dell'elemento. Richiamando l'espressione della curvatura dalla teoria della piastra si ha che:

$$\underline{k} = \begin{pmatrix} +\frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ -\frac{\partial \theta}{\partial y} \\ +\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \theta}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{pmatrix}$$

Analogamente tramite una seconda matrice di selezione si ha:

$$\begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{bmatrix} = \underline{\underline{H}}^+ \underline{\underline{Q}}(\xi, \eta) \begin{bmatrix} \theta \\ \varphi \end{bmatrix}$$

A questo punto è possibile ricavare il valore della deformazione in ogni punto lungo lo spessore della piastra:

$$\underline{\epsilon} = \bar{\underline{\epsilon}} + z \underline{k}$$

Dove $\underline{\epsilon}$ è la deformazione in un punto generico della piastra lungo lo spessore, $\bar{\underline{\epsilon}}$ è la deformazione sul piano di riferimento, z è lo spostamento rispetto al piano di riferimento (positivo verso il top) e \underline{k} è la curvatura sul piano di riferimento. Esplicitando tutti i termini si ha:

$$\underline{\epsilon}(\xi, \eta, z) = \left[\underline{\underline{H}}^{\dagger} \underline{\underline{Q}}(\xi, \eta) \quad \underline{\underline{0}} \quad z \underline{\underline{H}}^{\ddagger} \underline{\underline{Q}}(\xi, \eta) \right] \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{v} \\ \underline{w} \\ \underline{\theta} \\ \underline{\varphi} \end{bmatrix}$$

Si noti che non si è considerata la rotazione ψ e che la deformazione ϵ è funzione di ξ e η in quanto individuano uno specifico punto sul piano e di z che individua una precisa distanza dal piano di riferimento. Nel dettaglio, considerando anche il moto di Drilling, si ha che:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} | & | & | & | & | & | \\ \hline \underbrace{1}_{u} & \underbrace{2}_{v} & \underbrace{3}_{w} & \underbrace{4}_{\theta} & \underbrace{5}_{\varphi} & \underbrace{6}_{\psi} \\ \hline \end{bmatrix}}_{(3 \times 24)} \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{v} \\ \underline{w} \\ \underline{\theta} \\ \underline{\varphi} \\ \underline{\psi} \end{bmatrix}$$

24 elementi

Dove i blocchi 1 e 2 della matrice 3×24 sono riempiti da $\underline{\underline{H}}^{\dagger} \underline{\underline{Q}}$ (una matrice di 3 righe e 8 colonne), e i blocchi 4 e 5 da $z \underline{\underline{H}}^{\ddagger} \underline{\underline{Q}}$ (una matrice di 3 righe e 8 colonne), mentre il blocco 3 che moltiplica gli spostamenti w è una matrice di soli zeri in quanto gli spostamenti lungo z non sono presenti nelle formule delle deformazione. Anche il blocco 6 è costituito da una matrice di soli zeri affinché il moto di Drilling non sia considerato.

Chiamiamo

$$B_0 = \begin{bmatrix} | & | & | & | & | & | \\ \hline H^{\dagger}Q & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \hline \end{bmatrix}$$

i cui termini sono costanti in z , e

$$B_1 = \begin{bmatrix} | & | & | & | & | & | \\ \hline \emptyset & \emptyset & \emptyset & H^{\ddagger}Q & \emptyset & \emptyset \\ \hline \end{bmatrix}$$

i cui termini sono, invece, lineari in z .

È possibile ora fornire una forma più compatta del vettore deformazione:

$$\underline{\epsilon}(\xi, \eta, z) = \left(\underline{\underline{B}}_0(\xi, \eta) + \underline{\underline{B}}_1(\xi, \eta)z \right) \underline{d}$$

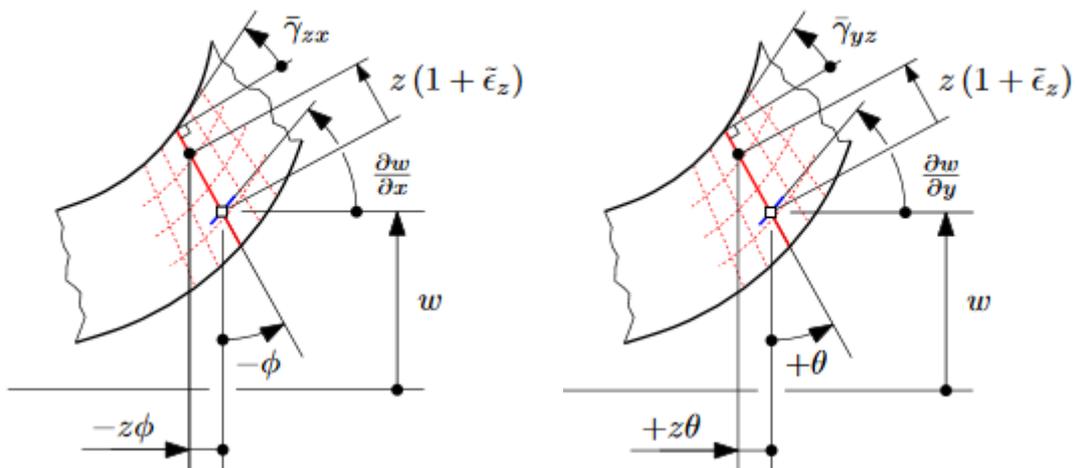
Dove \underline{d} è un vettore le cui componenti sono i sei gradi di libertà, tre per gli spostamenti e tre per le rotazioni.

Inoltre, devono essere valutate anche le deformazioni fuori piano $\bar{\gamma}_{zx}$ e $\bar{\gamma}_{yz}$ che, dalla teoria della piastra, sono definite nel seguente modo:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \bar{\gamma}_{zx} - \phi$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \bar{\gamma}_{yz} + \theta$$

Le deformazioni fuori piano sono date dalla somma algebrica di due contributi come si può notare meglio dal seguente costrutto geometrico:



Lo spostamento w è definito per interpolazione e con le formule precedenti è possibile ricavare le sue derivate lungo x e y :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} = \underline{\underline{L}}(\xi, \eta) \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix}$$

E allo stesso modo si possono ricavare per interpolazione le rotazioni lungo x e y in ogni punto della piastra:

$$\theta(\xi, \eta) = \underline{\underline{N}} \underline{\underline{\theta}}$$

$$\phi(\xi, \eta) = \underline{\underline{N}} \underline{\underline{\phi}}$$

Avendo ora calcolato le pendenze e le rotazioni si possono valutare le deformazioni fuori piano:

$$\begin{bmatrix} \bar{\gamma}_{zx} \\ \bar{\gamma}_{yz} \end{bmatrix} = \underline{\underline{L}}(\xi, \eta) \underline{w} + \begin{bmatrix} 0 & +\underline{\underline{N}}(\xi, \eta) \\ -\underline{\underline{N}}(\xi, \eta) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\theta} \\ \underline{\varphi} \end{bmatrix}$$

Più compattamente si può scrivere:

$$\begin{bmatrix} \bar{\gamma}_{zx} \\ \bar{\gamma}_{yz} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \underline{\underline{L}}(\xi, \eta) & 0 & \underline{\underline{N}}(\xi, \eta) \\ 0 & 0 & \underline{\underline{L}}(\xi, \eta) & -\underline{\underline{N}}(\xi, \eta) & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{B}}_y(\xi, \eta)} \underline{d}$$

Dove $\underline{\underline{B}}_y(\xi, \eta)$ è una matrice costituita da 2 righe e 5 blocchi. Quindi le matrici $\underline{\underline{B}}_0(\xi, \eta)$, $\underline{\underline{B}}_1(\xi, \eta)$ e $\underline{\underline{B}}_y(\xi, \eta)$ definiscono lo stato deformativo in ogni punto dell'elemento.

I 24 modi deformativi

In figura 4 è rappresentato, nella sua configurazione indeformata, un elemento piastra regolare con 4 nodi ognuno dei quali dotato di 6 gradi di libertà. Viene riportato il piano medio e anche lo spessore e quindi il top e il bottom. Le stelle rosse, costituite ciascuna da tre segmenti, descrivono le direzioni lungo le quali i nodi possono spostarsi.

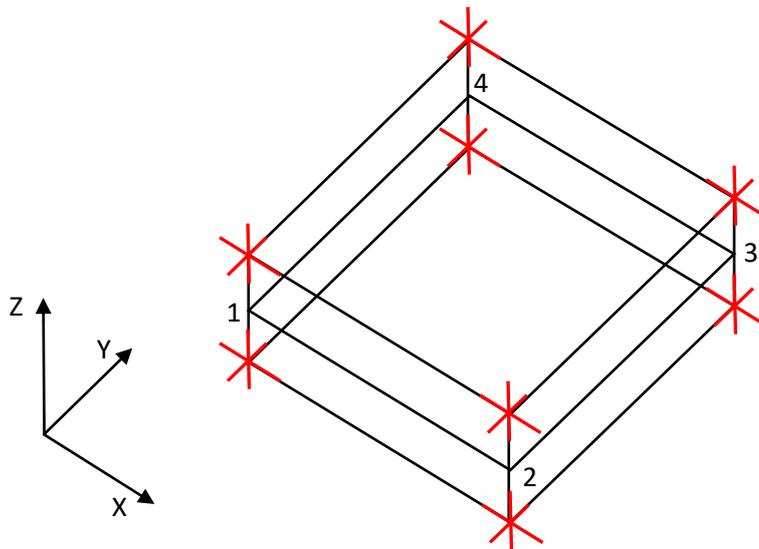


Figura 4

L'elemento nella totalità è costituito da 24 gradi di libertà, ovvero potrà deformarsi in 24 modi l'uno indipendente dall'altro. Il metodo più semplice per trovare i suddetti modi deformativi è quello di far variare uno per volta i gradi di libertà.

Supponiamo di voler valutare il modo in cui si deforma l'elemento sotto le seguenti ipotesi:

$$u_2 = \varepsilon$$

$$u_i = 0 \quad \text{con } i \neq 2$$

$$v_i, w_i = 0 \quad \text{con } i=1,2,3,4$$

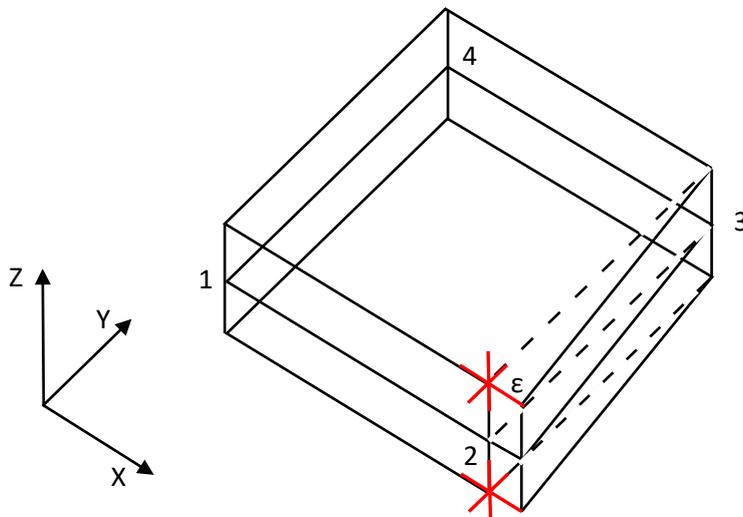


Figura 5

Con la stessa strategia si ricavano gli altri 23 modi deformativi indipendenti, combinando i quali si ottengono tutti i possibili modi deformativi dell'elemento. Un modo deformativo che non è combinazione lineare di questi 24 modi deformativi elementari non può esistere.

Qualunque modo deformativo che non rientra nei 24 precedenti vede l'elemento come infinitamente rigido. Più chiaramente consideriamo una piastra appoggiata sui lati 23 e 14 caricata uniformemente da una forza di pressione come in figura 6:

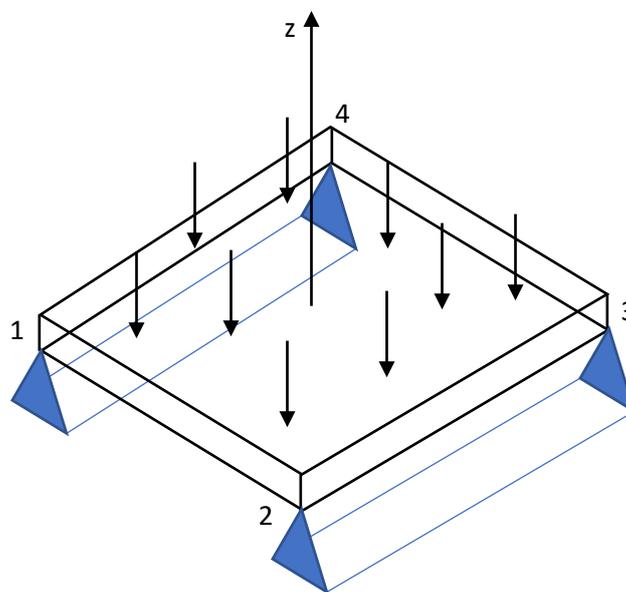


Figura 6

Le condizioni di appoggio al contorno sono le seguenti:

$$w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = 0$$

cioè l'appoggio impedisce lo spostamento lungo z ai nodi. Si potrebbe ipotizzare che la struttura deformi con "spanciamento":

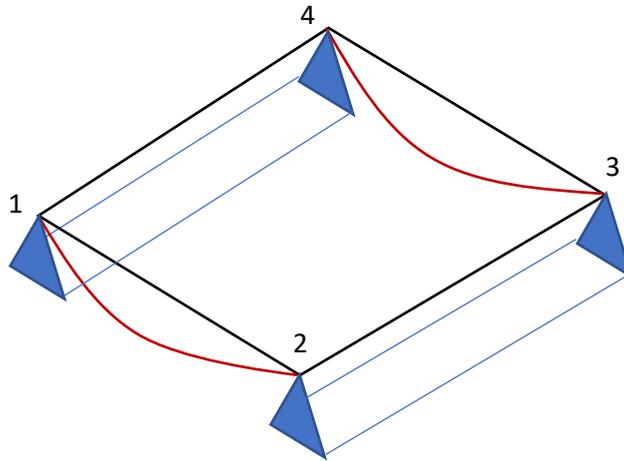


Figura 7

Come già detto, questa deformazione è possibile solo se fosse combinazione lineare dei 24 modi deformativi precedenti. Ma, considerando che tutti i punti appartenenti al lato 12 sono ottenuti per interpolazione lineare, poiché sia al nodo 1 che al nodo 2 il valore dello spostamento è nullo, sarà tale anche per tutti i punti appartenenti al lato 12. Lo stesso ragionamento può essere ripetuto per tutti i punti appartenenti ai restanti tre lati. Per quanto riguarda i punti interni il ragionamento è analogo se li si considera appartenenti a dei ipotetici lati (ovviamente paralleli ai lati della piastra) che hanno per estremità punti che si trovano sui lati della stessa. Quindi, l'elemento risulta essere infinitamente rigido alla deformazione ipotizzata in quanto non è combinazione lineare delle 24 elementari.

Se, invece, consideriamo ora la piastra costituita da due elementi differenti e appoggiata solo ai nodi (figura 8) non c'è alcuna condizione che imponga spostamento nullo ai nodi di contatto tra i due elementi, per cui in questo caso la piastra si può deformare come si era supposto precedentemente.

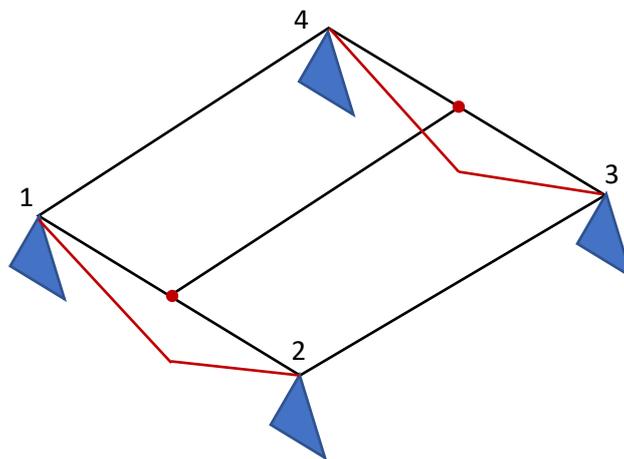
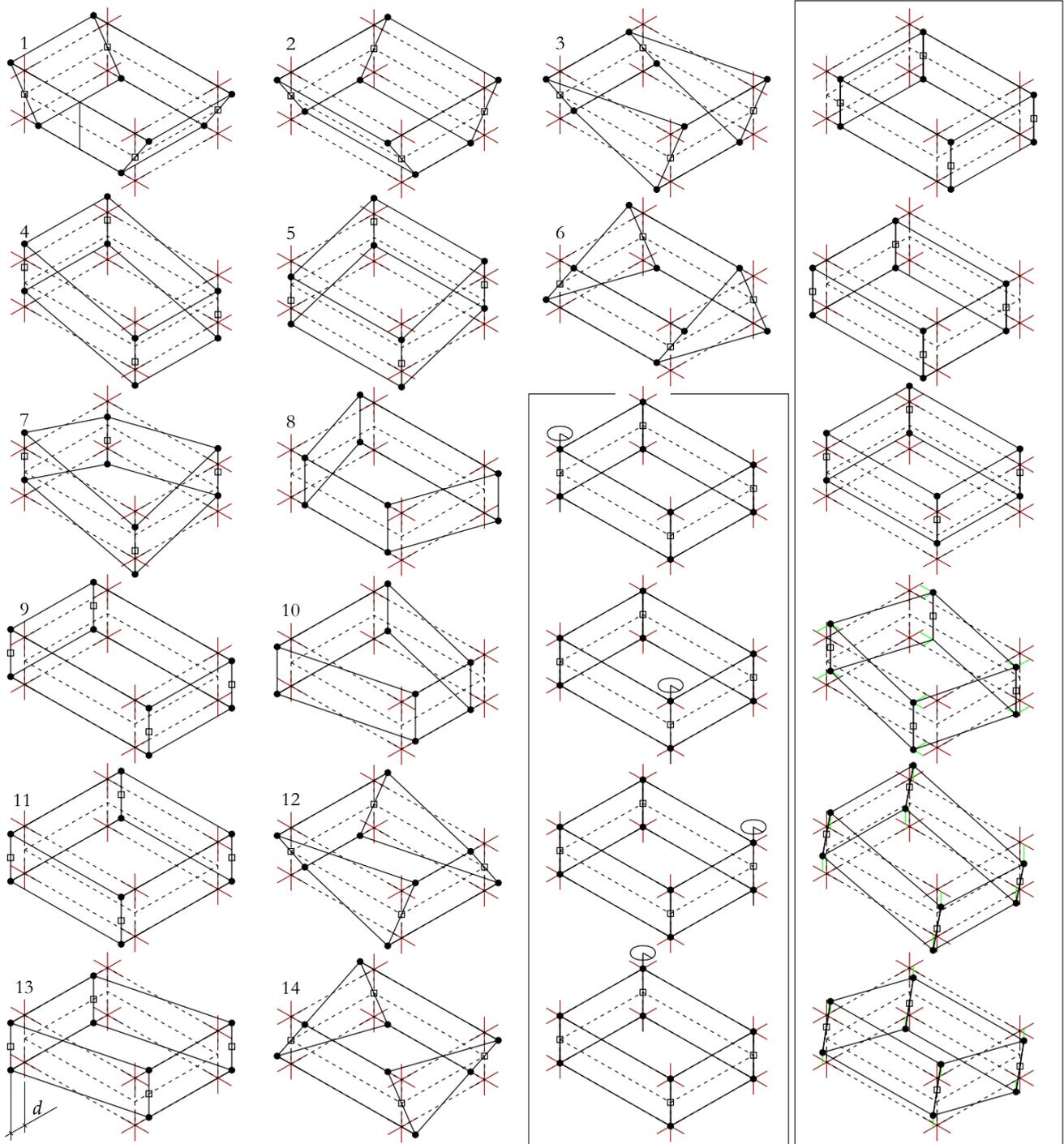


Figura 8

Analizziamo ora quali sono i 24 modi elementari



elemento rettangolare $2a \ 2b$, spessore h
spostamenti rappresentati di modulo d

$$x = a\xi, y = b\eta, z = 0$$

La quarta colonna rappresenta i 6 moti di rototraslazione rigida, ordinatamente è raffigurata la traslazione uniforme lungo l'asse x , l'asse y e l'asse z e poi la rotazione intorno agli assi z , y e x .

Le ultime quattro immagini della terza colonna considerano il moto di Drilling ai nodi.

Questi 10 modi deformativi, in realtà, non sono delle deformazioni in quanto i primi 6 sono delle rototraslazioni e quindi non hanno energia potenziale elastica e lo stesso vale, secondo la teoria della piastra, per gli ultimi 4 in quanto rappresentano delle rotazioni intorno ai nodi.

I rimanenti 14 modi deformativi si raggruppano in 3 famiglie:

-deformazioni di tipo membranale, cioè tutto il materiale lungo lo spessore si deforma allo stesso modo, il top si deforma come il bottom e non c'è nessun spostamento fuori piano. In questa famiglia rientrano le deformazioni 9 (ϵ_x uniforme), 11 (ϵ_y uniforme) e 13 (deformazione di taglio, γ_{xy} uniforme). Appartengono a questa famiglia anche le deformazioni trapezie 8 (ϵ_x varia linearmente in y) e 10 (ϵ_y varia linearmente in x);

-deformazioni taglianti, cioè il top si deforma come il bottom ma i segmenti congiungenti i nodi non ruotano ma traslano lungo z . Sono deformazioni taglianti fuori piano quelle rappresentate nelle figure 4, 5 e 7;

-deformazioni torsionali, cioè il top si deforma in maniera opposta al bottom. A questa famiglia appartengono le deformazioni rappresentate nelle figure 1,2,3,6,12 e 14.