

## Conclusioni della lezione di laboratorio precedente:

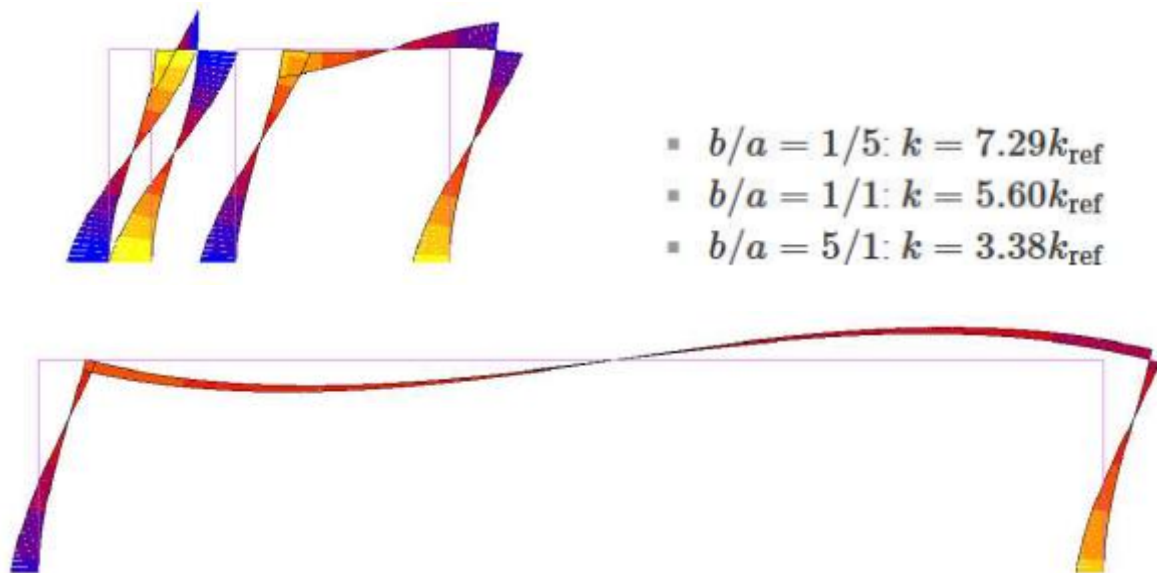


Figura 1 – Diagrammi di  $M_t$  per Rollbar al variare del  $K_{ratio}$

Nel sistema Rollbar trattato precedentemente è possibile trarre alcune conclusioni in funzione dell'Aspect Ratio  $= \frac{b}{a}$  dove  $b$  è la larghezza ed  $a$  è la lunghezza della struttura. Nella fattispecie è possibile constatare dai diagrammi in figura1 che per piccoli valori di  $\frac{b}{a}$  la struttura risulterà molto rigida al taglio e dunque al momento flettente<sup>1</sup>. Viceversa, per alti valori di  $\frac{b}{a}$ , la struttura sarà molto cedevole e si ottiene con buona approssimazione una trave che lavora solo a sforzo normale.

### Richiami sulla modellazione simmetrica:

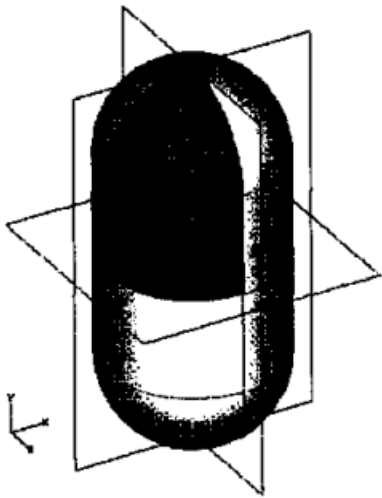
Nella trattazione di problemi simmetrici è possibile modellare solamente una porzione del sistema da studiare a patto che si verifichino due condizioni:

1. Il sistema sia geometricamente simmetrico
2. Il sistema sia caricato simmetricamente<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Si ricordi che  $M_f = \frac{d}{dt}T$ .

<sup>2</sup> In particolare il sistema induce una risposta deformativa simmetrica.

Ad esempio, nel caso di un corpo come in figura avente 3 piani di simmetria, ogni



punto su 1/8 di porzione possiede altre 7 immagini sulle rispettive porzioni, pertanto, per sole considerazioni geometriche, si può concludere che è possibile modellare soltanto 1/8 della struttura. Tuttavia nel caso in cui sul corpo sia applicato un carico, è necessario analizzare la maniera in cui questo è applicato. Nel caso in cui il carico giace su un piano di simmetria, questo viene ripartito equamente sulle due porzioni simmetriche. Ancora, se giace su una retta ottenuta dall'intersezione di due piani di simmetria, il carico verrà ripartito sul quarto di struttura considerata.

Figura 2 – Corpo con 3 piani di simmetria

Un caso particolare è quello in cui il carico sia una pressione; si osserva che per definizione stessa di pressione, non è necessario ripartirla ulteriormente<sup>3</sup>.

### Vincoli di simmetria

Soddisfatte le due ipotesi precedenti possiamo completare la semplificazione della struttura adottando i vincoli di simmetria. Questi vincoli vengono inseriti per rispettare la condizione di continuità del materiale, in particolare:

Un punto che giace sul piano di simmetria non può essere sede di distacco e/o compenetrazione.

In termini di spostamenti, questo fatto si traduce in:

- Spostamento normale al piano di simmetria nullo
- Rotazione sugli assi ortogonali al piano di simmetria nulla

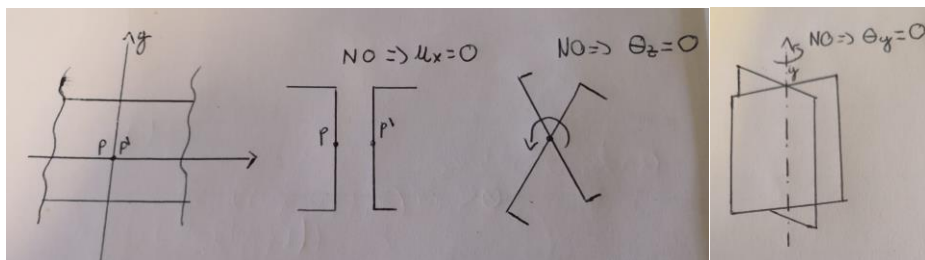


Figura 3 – Condizioni di simmetria

<sup>3</sup> Poiché  $p = F/A$  prendendo in considerazione meno superficie a cui è esposta la pressione si scala giù il carico soggetto ad una sola parte di struttura presa in considerazione.

## Vincoli di antisimmetria

Anche nel caso di strutture geometricamente simmetriche ma aventi carichi che inducono una risposta deformativa antisimmetrica è possibile adottare una semplificazione della struttura come fatto in precedenza. A differenza di quanto visto per le condizioni simmetriche, una difficoltà non irrilevante è la scrittura dei vincoli di antisimmetria. Per ovviare a tale problema si adotta un espediente logico.

Si considera dapprima il piano di simmetria come se questo fosse incastrato<sup>4</sup>, poi dai vincoli di incastro eliminiamo i vincoli di simmetria. Le condizioni rimanenti rappresentano i vincoli di antisimmetria.

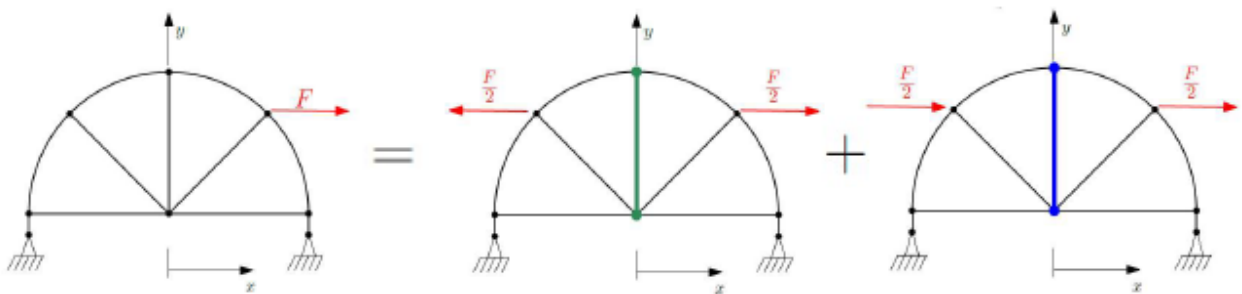


Figura 4 – Applicazione del principio di sovrapposizione

In figura è rappresentato un caso generale di struttura la cui semplificazione è comunque possibile assumendo il problema come somma di due sottoproblemi: uno simmetrico ed uno antisimmetrico.

## Analisi strutturale di un “Ladder Frame” o telaio a longheroni

Un Ladder frame è un particolare tipo di telaio caratterizzato da una porzione anteriore e una posteriore infinitamente rigide, interconnesse tra loro tramite l’ausilio di longheroni deformabili (vedi figura 4).

In questa lezione, si vuole calcolare la rigidità torsionale  $k_t$  di un Ladder frame poggiato su tre ruote con un carico applicato.

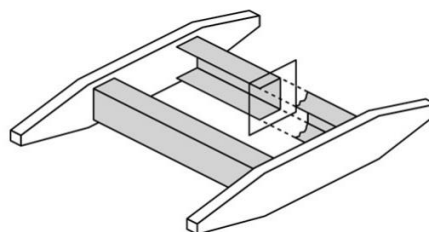


Figura 5 – Ladder Frame

<sup>4</sup> Considerando tutti gli spostamenti nulli

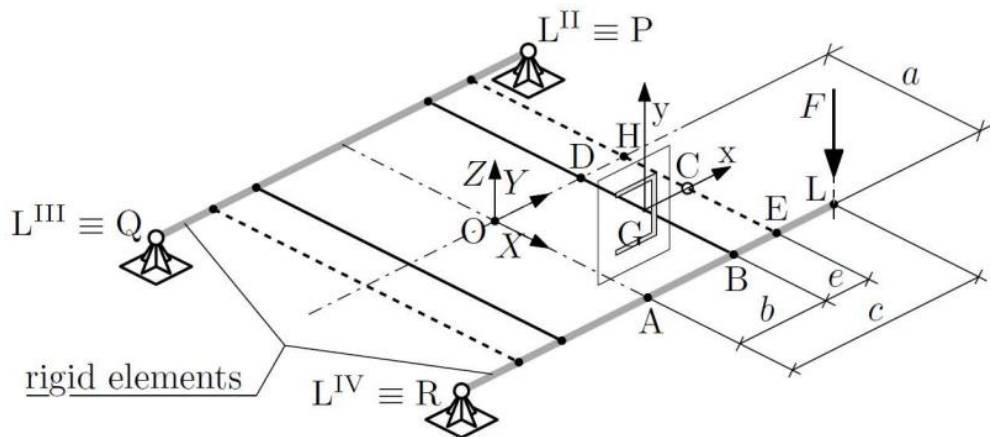


Figura 6 – Esempio di telaio a longheroni

In figura 6 è riportata la struttura semplificata di una trave a longheroni. Il sistema si fatto presenta 3 gradi di libertà residui: due traslazioni nel piano di appoggio e una rotazione attorno l'asse Z. Per andare a studiare la struttura e renderla ben posizionata nello spazio, si inserisce un carrello per impedire la traslazione lungo X, un altro per la traslazione in Y ed un ultimo carrello per impedire la rotazione attorno Z. Si osserva che quest'ultimo carrello va inserito in maniera opportuna in modo da non avere centri d'istantanea rotazione nel piano XY della struttura rendendo di fatto la struttura isostatica.

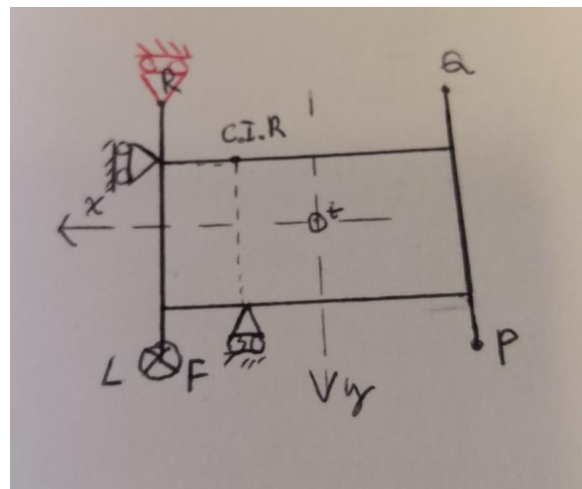
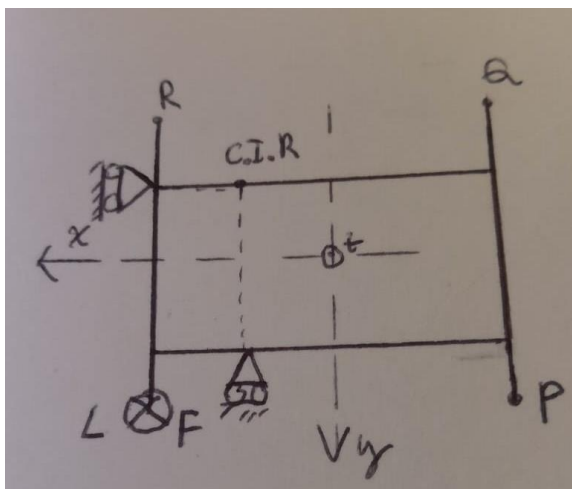


Figura 7 – Ladder Frame visto dall'alto e relativo inserimento carrelli

## Calcolo delle reazioni vincolari

Il calcolo delle reazioni vincolari viene eseguito in maniera grafica. Per il calcolo della reazione vincolare nel punto Q si procede con l'equilibrio alla rotazione attorno all'asse PR in modo da eliminare il contributo delle reazioni su P e R.

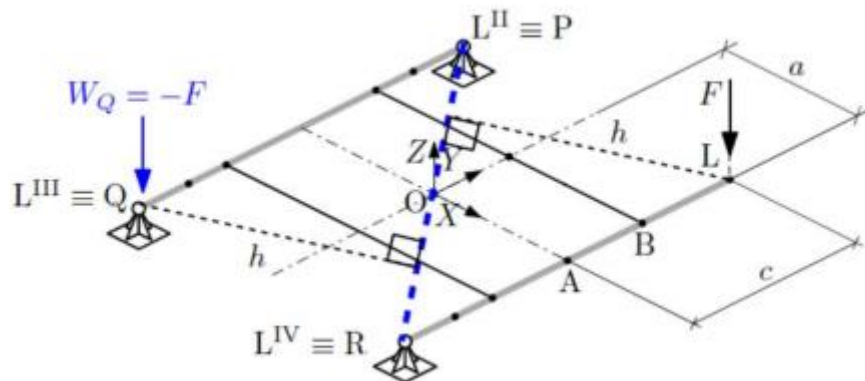


Figura 8 – Calcolo della reazione vincolare in Q

Con considerazioni analoghe si procede al calcolo delle rimanenti reazioni vincolari ottenendo il sistema in figura 9.

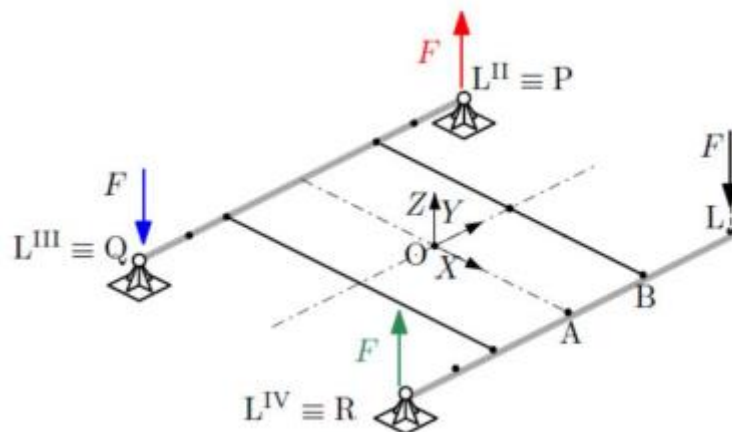


Figura 9 – Reazioni vincolari agenti sul sistema

Analizzando come è caricata la struttura si deduce che:

- Il piano ZY è un piano di antisimmetria
- Il piano ZX è un piano di antisimmetria

Per completezza, si osserva che esiste un terzo piano di antisimmetria XY che divide la sezione a C del longherone in due sezioni a L. Tuttavia per semplicità di calcolo, tale piano non viene considerato.

### Imposizione dei vincoli di antisimmetria:

Con le considerazioni sopra fatte, andiamo a modellare  $\frac{1}{4}$  di struttura, ricordando che la forza applicata sul punto L non verrà ripartita sulla porzione dato che essa non giace su nessun piano di antisimmetria.

Analizziamo i piani XZ e YZ ricavando le condizioni di antisimmetria, eliminando quelle di simmetria.

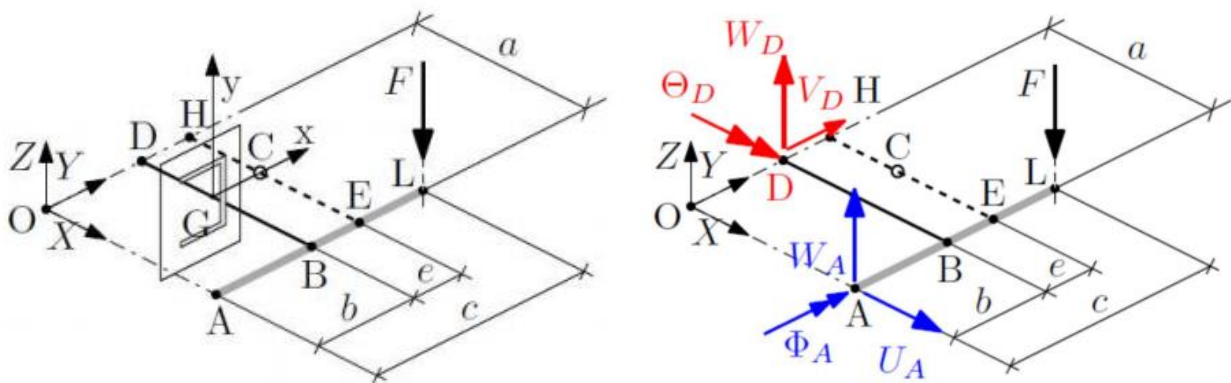


Figura 10 – Porzione di struttura presa in considerazione

Piano YZ

$$u_D \neq 0$$

$$v_D = 0$$

$$w_D = 0$$

$$\theta_D = 0$$

$$\phi_D \neq 0$$

$$\psi_D \neq 0$$

Piano XZ

$$u_A = 0$$

$$v_A \neq 0$$

$$w_A = 0$$

$$\theta_A \neq 0$$

$$\phi_A = 0$$

$$\psi_A \neq 0$$

Lo studio di questa trave prevede un Castigliano molto più complesso, dovuto alla compresenza di momento flettente, momento torcente e forze di taglio. I calcoli vengono eseguiti elaborando un codice Maxima. (Vedi codice Maxima “Listato a cura studenti Telaio a longheroni”)

## Rigidità torsionale

Dal codice Maxima abbiamo ottenuto l'energia potenziale elastica e quindi anche il cedimento del quarto di struttura. Per ricavare il cedimento del punto L dell'intera struttura soggetta alla forza  $F$  sono possibili due alternative:

1. Moltiplicare per quattro volte l'energia potenziale elastica del quarto di struttura e successivamente calcolare il cedimento con Castigliano.
2. Dal calcolo del cedimento del quarto di struttura si utilizza un metodo grafico per ottenere quello relativo all'intera struttura.

Per chiarezza, si prende in considerazione la seconda alternativa e si presenta nel seguito la strategia di calcolo impiegata. Si considera dapprima l'intera struttura soggetta al solo cedimento nel punto L ( $\perp$ ). Si esegue un primo bilancio di spostamenti di corpo rigido considerando l'antisimmetria della struttura.

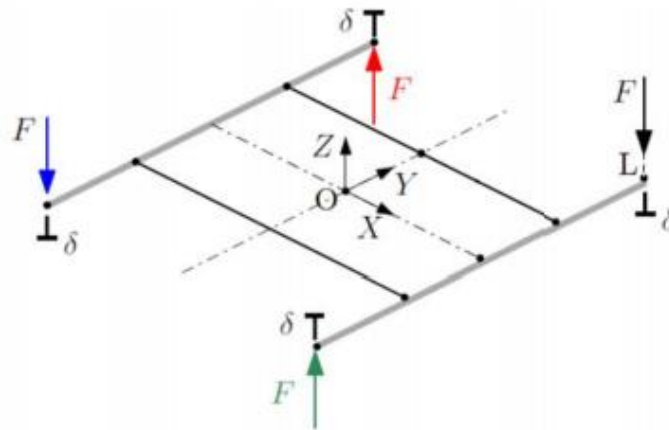


Figura 11 – Calcolo grafico dei cedimenti

Si nota però che gli spostamenti si fatti non sono concordi con i vincoli imposti dal sistema, ovvero si ottengono spostamenti non ammissibili con la presenza dei carrelli. Pertanto si bilanciano gli spostamenti nel punto P e nel punto R. Per antisimmetria si inseriscono gli spostamenti in L e Q, ottenendo un secondo sistema di spostamenti si fatto:

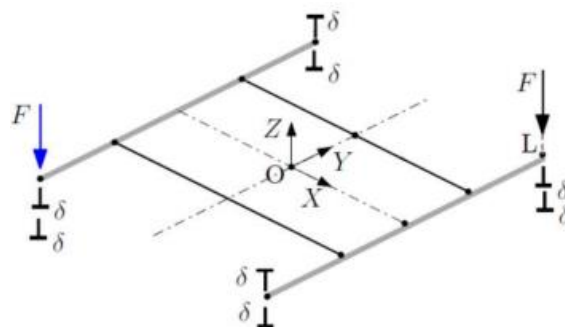


Figura 12 – Calcolo grafico dei cedimenti

Però si vede come gli spostamenti del punto Q non sono ancora concordi col vincolo di cerniera, pertanto sarà necessario aggiungere 2 spostamenti che controbilancino quelli già esistenti in Q. Per bilanciare gli spostamenti di corpo rigido si aggiunge infine lo stesso numero di spostamenti sul punto L.

Si ottiene infine il sistema da cui si può dedurre come il cedimento del punto L dell'intera struttura è 4 volte quello del quarto di struttura calcolato inizialmente.

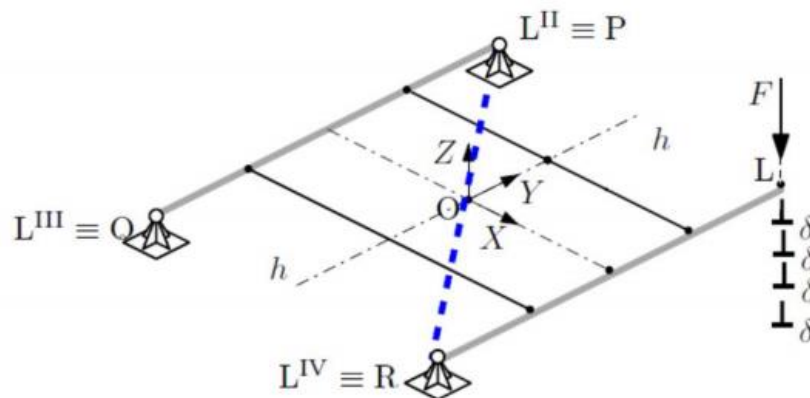


Figura 13 – Cedimento finale del punto L

A questo punto si adopera il calcolo della rigidezza torsionale che per definizione sarà calcolata come:

$$t_s = \frac{M_t}{\Delta\theta}$$

$t_s$  : torsional stiffness [Nm/deg]  
 $M_t$ : torsional moment  
 $\Delta\theta$ : rotation

Per il calcolo dello spostamento relativo assumiamo per ipotesi di essere in campo elastico lineare e di spostamenti infinitesimi. In forza di tali ipotesi è possibile confondere la rotazione descritta dallo spostamento infinitesimo del punto L con la tangente alla circonferenza. Pertanto la rotazione relativa risulta essere:

$$\Delta\theta = \frac{4\delta}{2c}$$

Allora la rigidezza torsionale vale:

$$t_s = \frac{M_t}{\Delta\theta} = \frac{F(2c)^2}{4\delta}$$

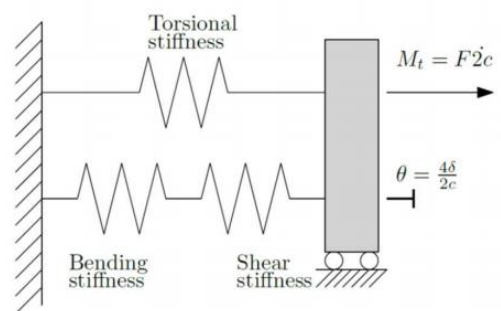


## Ulteriori considerazioni:

Nel codice maxima caricato precedentemente è possibile introdurre 3 parametri, uno per taglio, per momento flettente e per momento torcente. Facendo variare opportunamente questi 3 parametri è possibile analizzare come le 3 caratteristiche della sollecitazione influenzino il valore della rigidità torsionale rispetto a quella calcolata precedentemente.

In particolare, utilizzando la funzione limite di maxima e possibile annullare volta per volta una o più caratteristiche di sollecitazione prese in considerazione. Facendo le dovute prove si ottengono i risultati in figura:

trs	bnd	shr	residual stiffness
1	1	1	100.0%
1	1	0	7.2%
1	0	1	7.2%
1	0	0	7.2%
0	1	1	92.8%
0	1	0	0.0%
0	0	1	0.0%
0	0	0	0.0%



Infine, è possibile approssimare il tutto come un sistema a molle poste in serie ed in parallelo. Questa approssimazione conferma con buona precisione i risultati ottenuti nel secondo listato maxima caricato dalla prof. Mantovani nella pagina.