

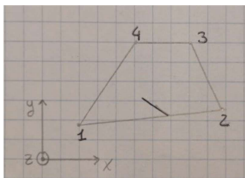
Subdivide

Prendiamo una mesh di 5 elementi quadrilateri piani. Apriamo dal Main la Mesh Generation e, di seguito, la shell Subdivide. Con questa funzione è possibile dividere l'elemento lungo i vari assi: la prima casella individua il primo asse, la seconda indica il secondo asse e la terza il terzo asse.

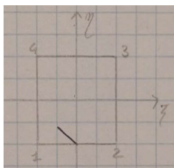


Quale è il primo asse? Consideriamo un esempio: prendiamo l'elemento quadrilatero centrale. La vista wireframe del software Marc presenta, per ogni elemento, un lato con una freccia, la cui orientazione indica:

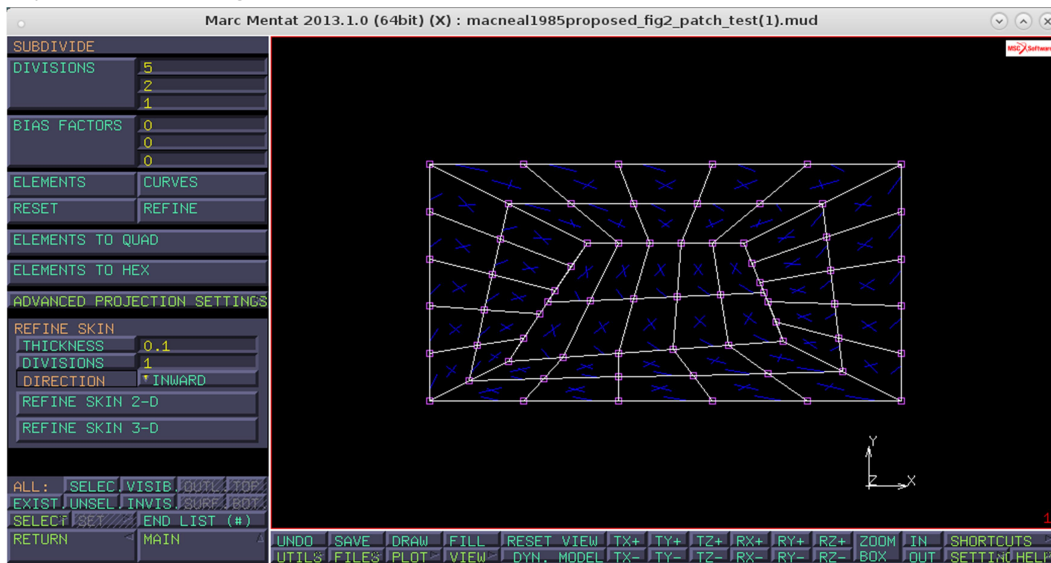
- Il TOP quando è rappresentata una rotazione antioraria rispetto all'asse normale uscente, come in figura;



- Il simbolo è costruito solo sul lato che va dal nodo 1 al nodo 2. Perciò sul dominio naturale $\xi - \eta$, questo segno sarà sempre sul lato che va dal nodo 1 al nodo 2.

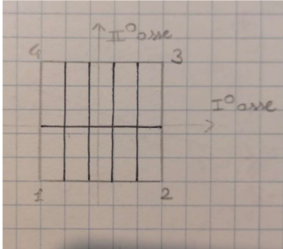


Modifichiamo i valori di subdivide in 5, 2, 1 che indicano il numero di suddivisioni dell'elemento, rispettivamente, lungo X, Y, Z.

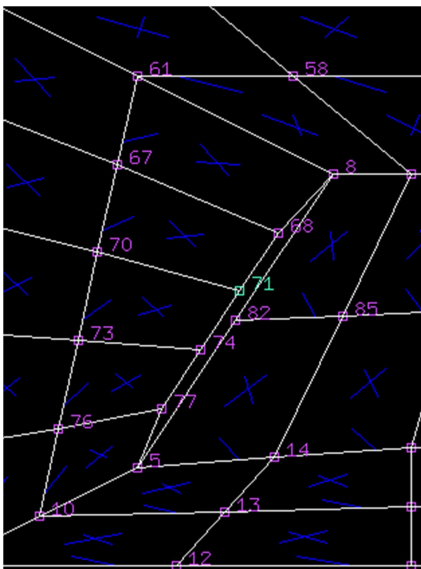
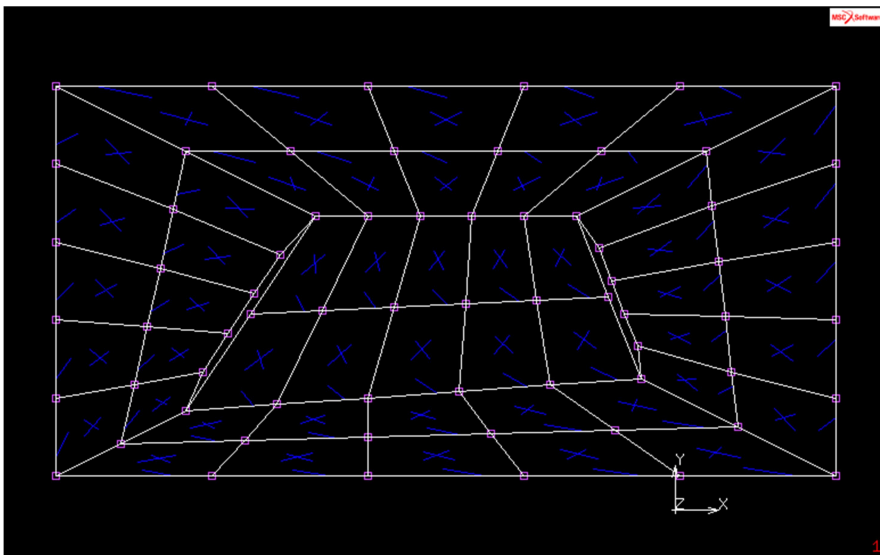


Il primo asse è quello allineato a ξ , cioè parallelo alla direzione dei nodi 1-2 e 4-3, mentre il secondo asse è quello allineato a η , cioè parallelo alla direzione dei nodi 2-3 e 1-4.

Il subdivide 5 2 1 divide l'elemento sul piano isoparametrico in 10 unità: 5 intervalli sui lati 1-2 e 3-4, 2 intervalli sui lati 2-3 e 4-1.



Tiriamo lungo X positivo la piastra per allungare il rettangolo. Notiamo che nella struttura si aprono due tagli:



Consideriamo il nodo 71: questo ha spostamenti e rotazioni in X Y Z indipendenti da quelli presenti dall'altra parte del taglio, cioè i punti materiali affacciati. Questo nodo ha gradi di libertà sufficienti per rappresentare una discontinuità della funzione spostamento.

Il taglio si chiude alle estremità (nodi 5 e 8). I gradi di libertà del nodo rappresentano gli spostamenti delle tre porzioni di materiale che si affacciano su quel nodo.

Warping Libero e Warping Impedito

Abbiamo due profilati a I a confronto: possiamo vedere ciascun profilato come costituito da due ali e un'anima, in mezzo c'è il piano di anti-simmetria. Il mezzo modello sottostante ha warping libero, quello sopra impedito. Le travi sono caricate con twist rate di 0,001 rad/mm.

Giriamo la vista al piano ZY. Apro il file dei risultati: studiamo la deformata del fianco, in specifico la rotazione in X.

```
MAIN--POST PROCESSOR--RESULTS--CHECK--RUN--SUBMIT--OPEN POST FILES RESULTS
```

```
SCALAR PLOT--CONTOUR BANDS
```

```
SCALAR--ROTATION IN X
```

Nel profilato con warping impedito le condizioni al contorno sul nodo di controllo all'estremità liberano gli spostamenti in x e in y, mentre bloccano le rotazioni in x e in y, per mantenere le facce parallele al piano XY.

Il profilato con warping libero possiamo vederlo come composto da tante lamelle di spessore infinitesimo: ogni sezione possiede una sua rotazione torsionale. Ogni lamella assume una porzione di momento torcente: il momento torcente totale è dato dalla somma dei singoli contributi. La torsione completa è data dal Mt e da due contributi aggiuntivi: gli spostamenti sul piano della lamella e in direzione normale al piano della lamella. Quindi il warping libero si ottiene imponendo nelle condizioni al contorno sul nodo di controllo all'estremità spostamenti in X e in Y liberi, come con warping impedito, e rotazioni in X e Y e spostamenti in Z liberi (nel warping impedito quest'ultimi sono bloccati per mantenere le ali parallele al piano XY).

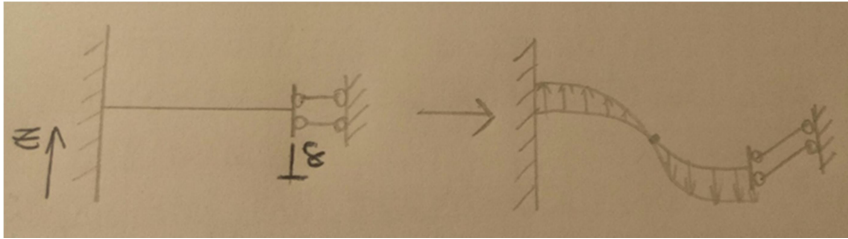
Come risultato l'ala ruota rigidamente, con rotazione uniforme, e controrota rispetto l'altra ala. L'ala si muove di moto di corpo rigido. L'unico elemento energetico associato ad una deformazione visibile sul piano dell'indeformata dell'ala è lo spostamento in x positivo e negativo (fuoripiano), a cui infatti è associata l'energia di twist. Se trascuro i moti fuori piano, il moto dell'ala proiettato sul piano su cui giace l'indeformata è la rotazione rigida, che però non dà contributo energetico. Il lavoro delle forze esterne (dato dal prodotto coppia per rotazione) è uguale all'energia potenziale elastica immagazzinata nel materiale deformabile. Poiché la struttura manca di deformazione, e quindi di energia potenziale elastica, il lavoro e la coppia necessari per ottenere la stessa rotazione (imposta) calano. La struttura non deforma, ed è più cedevole.

Quest'ala non ha i contributi delle componenti di tensione di tipo σ_{11} su top, middle e bottom layer né τ_{12} sulla quotaparte membranale al middle layer. Viceversa, l'unica deformazione che dà contributo energetico, quindi rigidità, è il twist.

Andiamo ora a bloccare il warping ai terminali. Nel profilato a warping impedito la contro-rotazione dei due terminali impone un abbassamento e un innalzamento in Y al bordo delle ali (lo stesso per warping libero e per warping impedito). Con warping libero, lo scostamento in y era gestito come rotazione rigida, con warping impedito, l'ala ha una deformazione (energicamente più rilevante), e non un moto puramente rigido. Le ali si deformano a S.

Schematizziamo il problema come fosse una trave stretta tra un incastro e un doppio pendolo, con spostamento in Z imposto. Otteniamo una deformata a S: il diagramma di momento flettente è a farfalla,

cioè varia linearmente da trattivo a compressivo, assume valore massimo agli estremi e si annulla al punto di flesso.



Il profilato con warping impedito può deformarsi a taglio (tensioni tangenziali τ_{12} al middle layer non nulle) e può deformarsi a S (tensioni assiali σ_{11} massime ai terminali, seguono il momento flettente). I due meccanismi coesistono e provocano lo scorrimento delle lamelle.

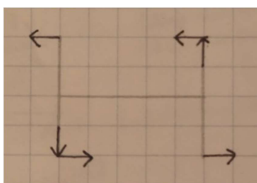
Tying Force e Tying Moment

Tying force e tying moment sono delle reazioni vincolari: sono forze esercitate dai vincoli interni (es vincoli di spostamento relativo tra nodo A e nodo B). Osservandoli lungo il lato corpo deformabile, sono le forze che il corpo deformabile riceve dall'RBE2. Quest'ultima, per come è stata selezionata, blocca gli stessi gradi di libertà dell'anti-simmetria, possiamo considerarlo come un piano di anti-simmetria mobile (abbiamo bloccato 2 spostamenti entro piano e la rotazione con asse fuori piano). Tutto questo accade a warping libero. L'RBE2 parzializzata costringe i gradi di libertà dei nodi dipendenti (spostamento X e Y e rotazione Z) a stare fissi rispetto al corpo rigido, il cui moto è controllato dal nodo di controllo: è un piano di anti-simmetria mobile.

Vincoli: RBE2 vs Boundary Conditions

Supponiamo che il nodo di controllo dell'RBE2 sia il 5539 (facciamo riferimento alla sezione a I). Se attiviamo il vincolo di spostamento lungo Y nelle **Boundary Conditions**, chiediamo che lo spostamento lungo Y del nodo 5539 sia uguale a zero. Quando questo vincolo è spuntato, c'è la possibilità che venga esercitata una reazione vincolare sul nodo in direzione Y: se il nodo prova a spostarsi verso il basso, appare una forza verso l'alto che lo riposiziona. Se lasciamo completamente libero il nodo di controllo dell'RBE2, L'RBE2 non prende carichi da terra: non riceve ne coppie ne forze. Supponiamo che sul nodo di controllo non ci sono delle forze esterne: il nodo di controllo non ha ne reazioni vincolari applicate, ne carichi esterni. Le uniche forze che agiscono sull'RBE2 sono le reazioni delle azioni che l'RBE2 applica sul corpo deformabile, cioè le tying force cambiate di segno, che quindi devono essere un sistema autoequilibrato.

Se, viceversa, il nodo è parzialmente libero, un disequilibrio delle tying force deve essere compensato da una reazione in Z e dai momenti di reazioni in X,Y,Z. Perciò è concesso un disequilibrio in termini di eccesso di forza in Z e eccesso di coppia in X,Y,Z. In questo caso le tying force sono completamente equilibrate alla traslazione X e Y, dove non abbiamo introdotto vincoli. Le forze sono auto-equilibrate e, di conseguenza, otteniamo una coppia torcente pura che va a scaricarsi sempre sulla reazione vincolare al vincolo di rotazione imposta. Quindi: *se attiviamo un vincolo nelle boundary conditions (ad es traslazione in Y), applichiamo una equazione di vincolo in più a terra, cioè blocchiamo un solo grado di libertà.*



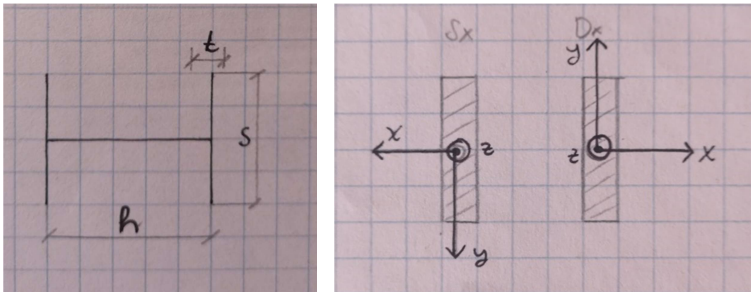
Se ora attiviamo un vincolo di **RBE2**, ad esempio lungo Z, *29 gradi di libertà vengono vincolati a seguire il corpo rigido* (sono gli spostamenti Z di 29 nodi): sui nodi appare una reazione vincolare di vincolo interno lungo Z. Se disattiviamo questo vincolo, le azioni sono completamente nulle con warping libero punto per punto (sono non nulle con Warping Impedito).

Tornando sulla sezione a I, se eliminiamo il vincolo sul nodo di controllo ma manteniamo il vincolamento tra RBE2 e corpo deformabile, localmente tra essi si generano delle reazioni vincolari, ma, poiché queste sono equilibrate da una reazione vincolare a terra nulla, allora la loro risultante sarà nulla. Quindi se vincoliamo 1 grado di libertà tra RBE2 e corpo deformabile imponiamo:

- non nulla la reazione associata a quel grado di libertà punto per punto lungo il corpo deformabile;
- nulla la risultante di tutte le reazioni: se vado in Warping impedito, noto che ho delle forze nodali in direzione assiale, la risultante delle forze interne è nulla.

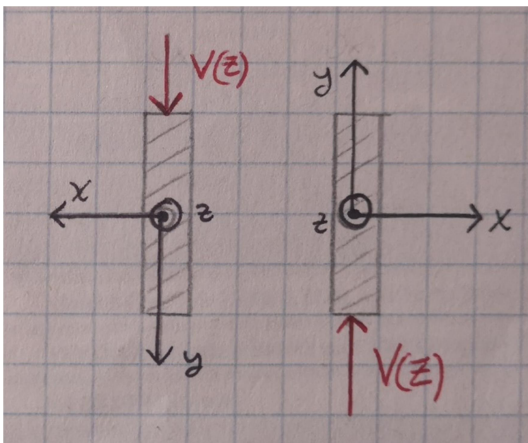
Effetto Vlasov

Riprendiamo la deformata a warping impedito a S e ricaviamo una teoria della torsione per questo oggetto. Nella sezione a doppia T consideriamo le ali come due sottravi, le quali sono in sezione rettangolare sottile.



Prendiamo due sistemi di riferimento diversi per le ali, in cui l'asse Z è in entrambe uscente e baricentrico, mentre gli assi X e Y sono ruotati di 180° nella trave di sinistra (Sx) rispetto quella di destra (Dx). Consideriamo solo l'ala di destra, poiché l'ala di sinistra si muove in maniera analoga.

Se è presente una deformata a S, è presente un momento flettente che varia linearmente, e quindi un taglio. Definiamo V il taglio in direzione Y che agisce sulla trave, il quale non è costante ma dipende da Z (questo perché consideriamo la successione di sezioni lungo Z). Esiste un legame tra taglio e momento flettente:

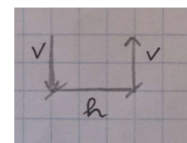


$$V = \frac{dM_x}{dz}$$

Trascuriamo il taglio U in direzione X.

I due tagli V sono in grado di generare momento torcente Tvlasov:

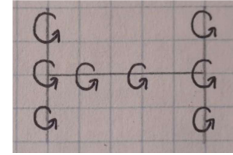
$$T_{vla} = hV = h \frac{dM_x}{dz}$$



dove h è il braccio tra le due forze, che passano per i due sistemi locali baricentrali. Il momento torcente totale trasmesso a cavallo della sezione è la somma dei contributi del momento torcente di Vlasov e di de St Venant (due meccanismi di trasmissione della torsione):

$$T = T_{vla} + T_{dsv}$$

T_{vla} è dovuto alla torsione delle lamelle infinitesime; T_{dsv} è dovuto all'inflessione. Il momento torcente di de St Venant è generato dalle microcopie sul profilato.



Se non ci sono azioni torcenti distribuite, cioè se il profilato è caricato a torsione solo agli estremi, T è costante. Esistono quindi due meccanismi per trasmettere il momento torcente: uno basato sul twist di ali e anima, l'altro sulla sollecitazione a taglio delle ali.

Ci concentriamo su T_{vlasov} . Riprendiamo la definizione di momento torcente di Vlasov:

$$T_{vla} = hV = h \frac{dM_x}{dz}$$

Esiste un legame tra il momento in X e la curvatura associata:

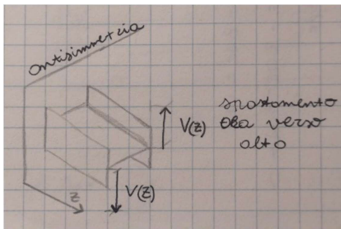
$$\frac{M_x}{EJ_{xx}} = \frac{1}{\rho_x}$$

Se il materiale è omogeneo: E è il modulo di Young, J_{xx} è il momento di inerzia.

La curvatura, a sua volta, è legata alla derivata seconda dello spostamento trasversale in Y dell'ala:

$$\frac{1}{\rho_x} = -\frac{d^2v}{dz^2}$$

Perciò se vogliamo avere un taglio che garantisce la seconda via di trasmissione del momento torcente, oltre a de St Venant, dobbiamo avere anche un momento flettente sulla singola ala. Se consideriamo il profilato nel piano di anti-simmetria che si estende da $Z=0$ fino ad un valore di Z specifico, $v(z)$ è lo spostamento dell'ala.



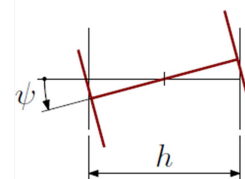
Ora possiamo scrivere:

$$M_x = -EJ_{xx} \frac{d^2v}{dz^2}$$

Quindi T_{vla} :

$$T_{vla} = -hEJ_{xx} \frac{d^3v}{dz^3}$$

Se ora ruotiamo la sezione indeformata di una quantità angolare $\psi(z)$, lo scostamento verticale delle ali proiettato sul piano in cui giaceva l'ala nell'indeformata vale:



$$v = \frac{h}{2}\psi$$

Sostituiamo v e troviamo la relazione tra T trasmesso e derivata terza della rotazione:

$$T = -\frac{h^2}{2}EJ_{xx} \frac{d^3\psi}{dz^3}$$

Definiamo il termine C_w , che è una proprietà della sezione (valori tabulati) e ha come unità di misura mm^6 :

$$-\frac{h^2}{2}EJ_{xx} = -EC_w$$

N.b.: J_{xx} riguarda la singola ala, non la sezione.

Possiamo quindi riscrivere:

$$T_{vla} = -EC_w \frac{d^3\psi}{dz^3}$$

Consideriamo ora l'effetto torcente dovuto alla teoria di de St Venant. Il momento vale:

$$T_{dsv} = GK_t \frac{d\psi}{dz}$$

Con G modulo di taglio, $K_t = \frac{1}{3} \sum_i l_i t_i$ rigidità a torsione della trave e $\frac{d\psi}{dz}$ definita twist rate.

Il taglio nelle ali è presente, ma non genera deformazione tagliante: la deformata delle ali è solo flessionale. Questo perché $\gamma_{12}=0$ e cioè $G \rightarrow +\infty$.

Dalla formula notiamo che T_{dsv} è proporzionale al twist rate, mentre su Vlasov il momento torcente è proporzionale alla derivata terza del twist rate. Per avere una porzione di momento torcente trasmesso in quota parte Vlasov uniforme dovremmo avere un twist rate crescere con legge parabolica. Raggruppando i due contributi, il momento torcente totale vale:

$$T = -EC_w \frac{d^3\psi}{dz^3} + GK_t \frac{d\psi}{dz} = \text{costante in } z \text{ (a meno di coppie torcenti distribuite)}$$

Deriviamo l'equazione e otteniamo una equazione differenziale di quarto ordine:

$$0 = \frac{dT}{dz} = +\frac{dT_{dsv}}{dz} + \frac{dT_{vla}}{dz} = -EC_w \frac{d^4\psi}{dz^4} + GK_t \frac{d^2\psi}{dz^2}$$

(N.b.: $EC_w = [\text{MPamm}^6]$, $GK_t = [\text{MPamm}^4]$)

Definiamo una lunghezza caratteristica d^2 (ci assicuriamo la positività con il quadrato) che è il fattore mancante alla rigidità torsionale per rappresentare EC_w :

$$d = \sqrt{\frac{EC_w}{GK_t}} \text{ [mm]}$$

L'equazione si semplifica:

$$0 = -d^2 \frac{d^4 \psi}{dz^4} + \frac{d^2 \psi}{dz^2}$$

Poiché l'equazione è omogenea, la soluzione risulta:

$$\psi(z) = c_1 \sinh\left(\frac{z}{d}\right) + c_2 \cosh\left(\frac{z}{d}\right) + c_3 \frac{z}{d} + c_4$$

Questa soluzione è definita sulla base di una coordinata assiale adimensionale: il rapporto tra posizione Z e lunghezza caratteristica. Se considero $z=0$ sull'anti-simmetria, il problema è antisimmetrico, perciò i termini simmetrici della soluzione possono essere eliminati: $c_4 = 0$ perché è un termine simmetrico, eliminiamo c_2 perché moltiplica \cosh che è una funzione pari. Rimangono solo 2 costanti da definire in base a cosa accade al terminale, cioè $z=l$. A questo punto posso avere diverse condizioni al contorno:

1. Rotazione imposta;
2. Assenza di warping, cioè $T_{dSV} = 0, \frac{d\psi}{dz} = 0$. Il warping, infatti, è condizione necessaria per trasmettere una quota parte di momento torcente secondo la teoria di de St Venant;
3. Coppia imposta, cioè $T_{vla} = C$.