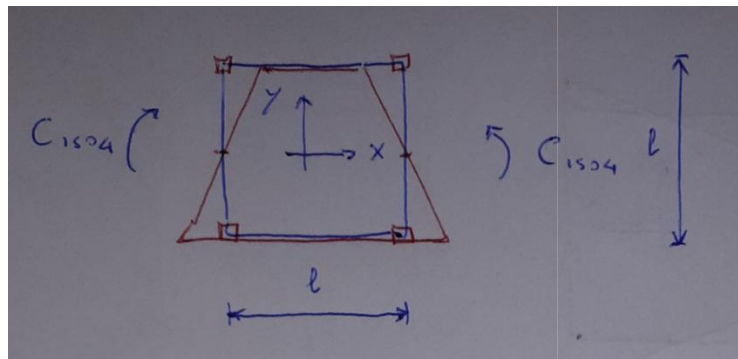


Lezione 14-05-2019 a cura di Savigni A., Varroni F. e Zanolì F.

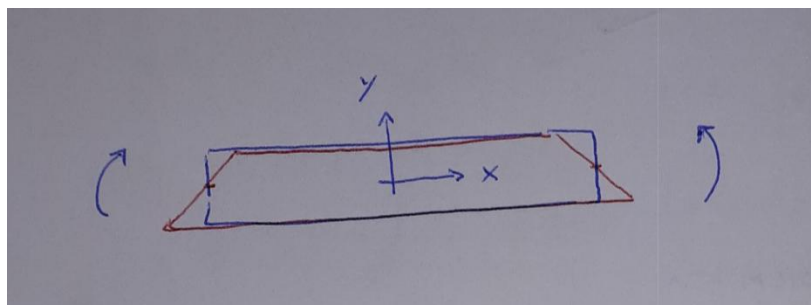
Si riprende il problema dello *shear locking* trattato nella lezione precedente nel caso di un elemento quadrilatero piano a 4 nodi che modella un elemento piastra, deformato a flessione entropiano mediante l'azione di due coppie C_{iso4} agenti sui lati verticali dell'elemento.

La deformata che si ottiene è una deformata a trapezio, in cui sono evidenti le deformate a taglio γ dovute alla presenza di tensioni taglianti spurie.

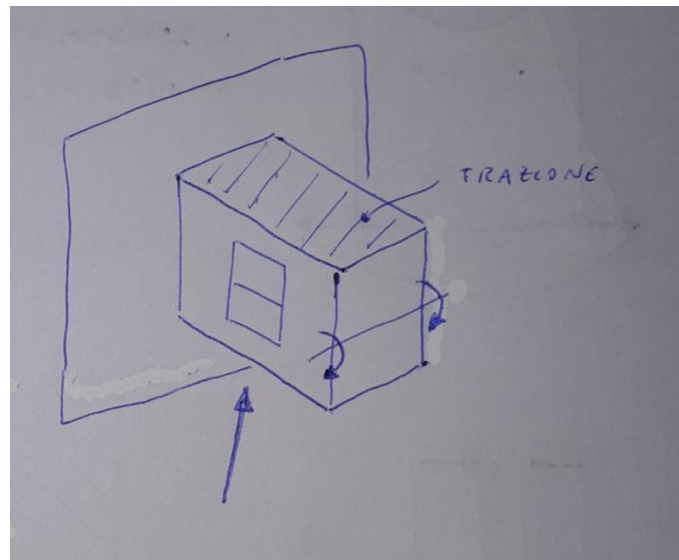


Come già evidenziato l'elemento quadrilatero a 4 nodi è più rigido della soluzione esatta del 48%, il che è inaccettabile. Questa differenza è dovuta alla presenza delle tensioni taglianti spurie, non presenti nella formulazione esatta.

L'aumento di rigidità dell'elemento quadrilatero è del 48% nel caso di quadrilatero con lati di uguale lunghezza ma la sovrastima aumenta se una dimensione prevale sull'altra.



Finora abbiamo considerato gli effetti che lo *shear locking* ha sui singoli elementi, tuttavia questo fenomeno riguarda anche le strutture composte da questi elementi, ad esempio si considera la seguente trave nello spazio, sollecitata a flessione:



I quadrilateri interessati dallo *shear locking* sono disposti sul fianco della trave e indicati dalla freccia.

Per compensare il fenomeno dello *shear locking* ci sono varie possibilità:

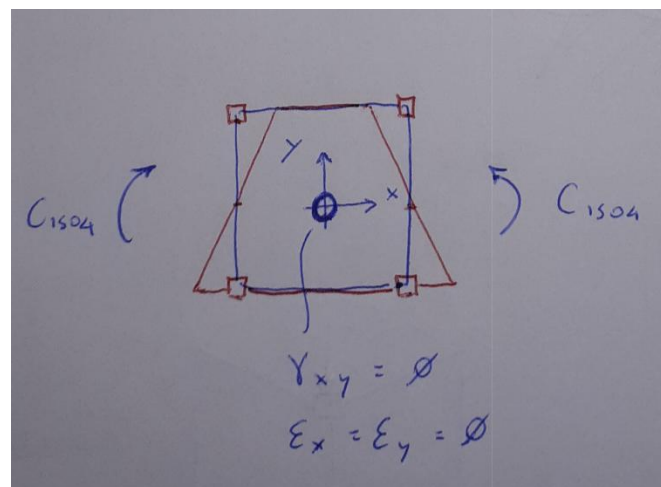
1. Campionamento nel centroide dell'elemento
2. Sottointegrazione selettiva
3. Variabili degli elementi
 - 3.1. Modellazione attraverso *Assumed strain*
 - 3.2. Modellazione attraverso *Solid shell*

Si considerano in seguito le varie tecniche.

1. Campionamento nel centroide dell'elemento

Si considera l'elemento quadrilatero a 4 nodi che, soggetto alle coppie C_{iso4} deforma a trapezio. Se anziché utilizzare una quadratura di Gauss a 4 punti, ovvero due punti per asse, si utilizzasse una tecnica a un punto per asse si campionerebbe l'elemento nel solo centroide.

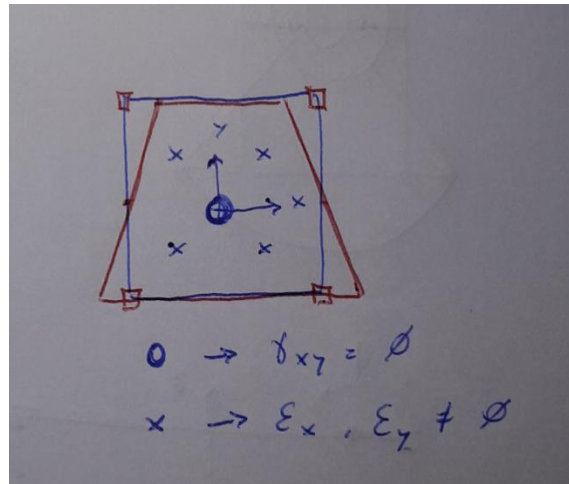
In questo modo ci si va a posizionare in una porzione di elemento in cui la deformata tagliante γ è nulla, quindi escluso il taglio e in questo modo riduco l'irrigidimento della struttura.



Il problema di questo metodo è che nel centroide dell'elemento sono nulle anche le deformazioni $\epsilon_x = \epsilon_y = 0$ quindi siccome non c'è alcuna energia interna dovuta alla deformazione nel punto associata all'applicazione della coppia posso affermare che la coppia $C_{iso4} = 0$.

2. Sottointegrazione selettiva

Questo metodo consiste nell'integrazione dell'elemento in punti tali da considerare contemporaneamente nulle le deformate a taglio e valutare le deformate ϵ_x ed ϵ_y che invece sono diverse da zero.



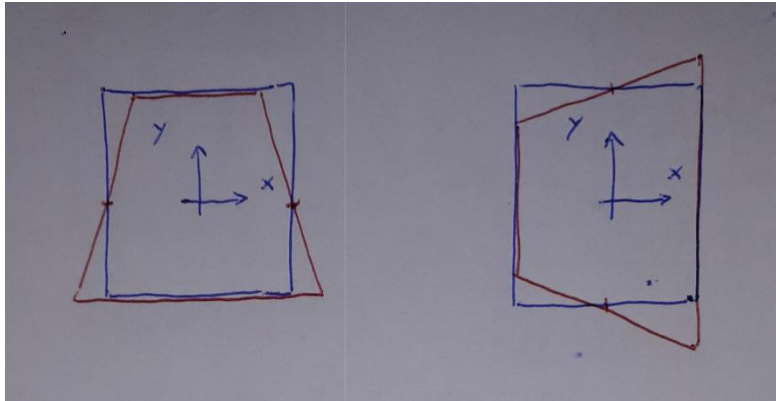
La scelta dei punti quindi è la seguente:

- 4 punti vengono presi attraverso la quadratura di Gauss che descrivono le deformazioni $\epsilon_x, \epsilon_y \neq 0$
- 1 punto nel centroide che permette di considerare $\gamma_{xy} = 0$

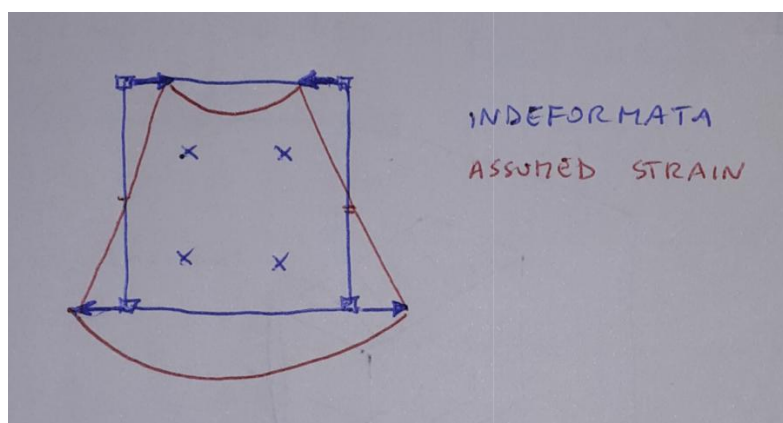
3.1 Modellazione attraverso Assumed strain

Si considera in Mentat un elemento quadrilatero a 4 nodi estruso in z con un piccolo spessore. Definisco poi le proprietà geometriche dell'elemento, lo considero "solid" e spunto la voce "assumed strain".

L'elemento così definito ha 2 modi di deformazione elementari:
la deformazione a trapezio nel piano rispetto ai due assi.

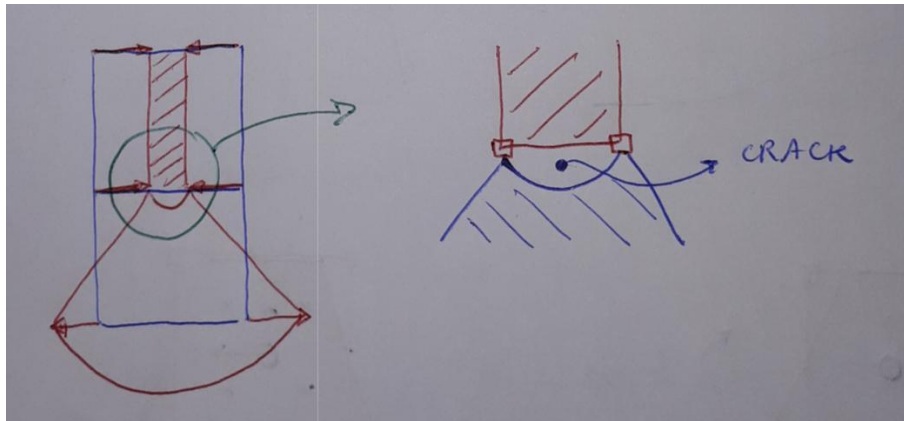


Si vanno poi a scegliere delle funzioni di interpolazioni quadratiche, in modo tale da non poter più rappresentare la deformata a trapezio. In questo modo il quadrilatero può deformarsi con un modo di deformazione proprio della flessione:



Questa tecnica presenta una criticità importante nel caso ci siano più elementi lungo lo spessore: si perde la continuità di spostamenti tra un elemento e l'altro e quindi si forma un crack tra di essi.

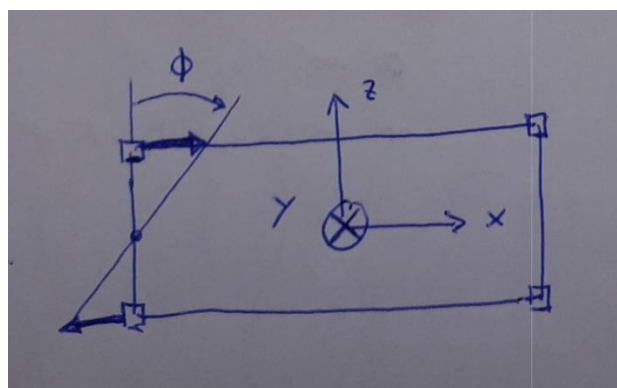
L'elemento superiore si schiaccia come indicato dalle frecce mentre quello inferiore si deforma come visto nella condizione di *assumed strain*:



3.2 Modellazione attraverso Solid shell

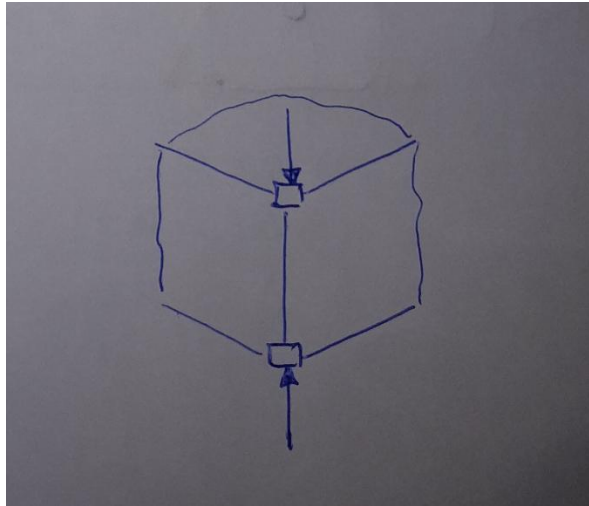
Considerando l'elemento precedentemente modellato come un *solid shell* si considera un elemento i cui nodi non possono effettuare rotazioni attorno all'asse z , quindi non è possibile rappresentare il moto di drilling.

Se però suppongo che i nodi compiano degli spostamenti differenziali attorno alla loro posizione posso comunque rappresentare le rotazioni attorno a un dato asse.

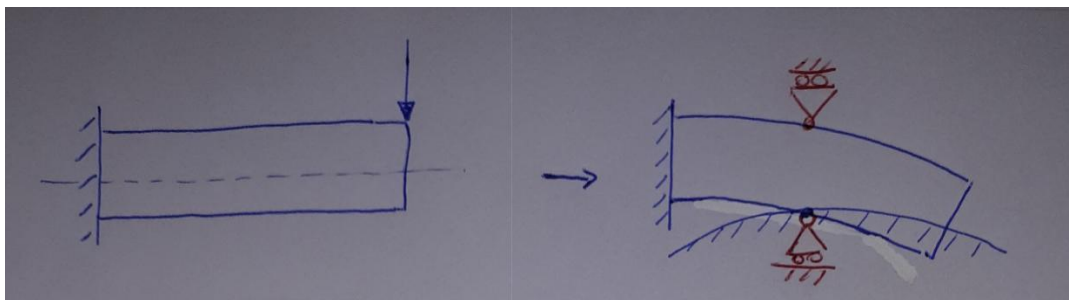


Due rappresentazioni aggiuntive che si possono ottenere con questa tecnica sono:

- schiacciamento della parete, ovvero si può avere una deformazione $\epsilon \neq 0$ lungo lo spessore facendo attenzione a definire correttamente l'asse lungo il quale si sviluppa lo spessore dell'elemento

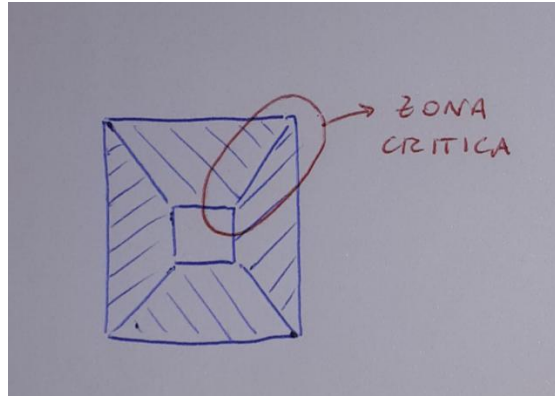


- contatti dell'elemento con due corpi, ad esempio un elemento schiacciato tra due corpi rigidi. In questo caso quando i corpi si toccano “aggancio” un vincolo nel punto di contatto (carrello rosso in figura) in modo da bloccarne lo spostamento, e posso ripetere l'operazione in due punti.



Nel caso di una piastra invece dovrei imporre un doppio vincolamento, il che costituisce una azione proibita.

La definizione degli elementi come *solid shell* ha dei limiti quando gli elementi sono distorti, ad esempio una sezione quadrilatera cava come in figura.



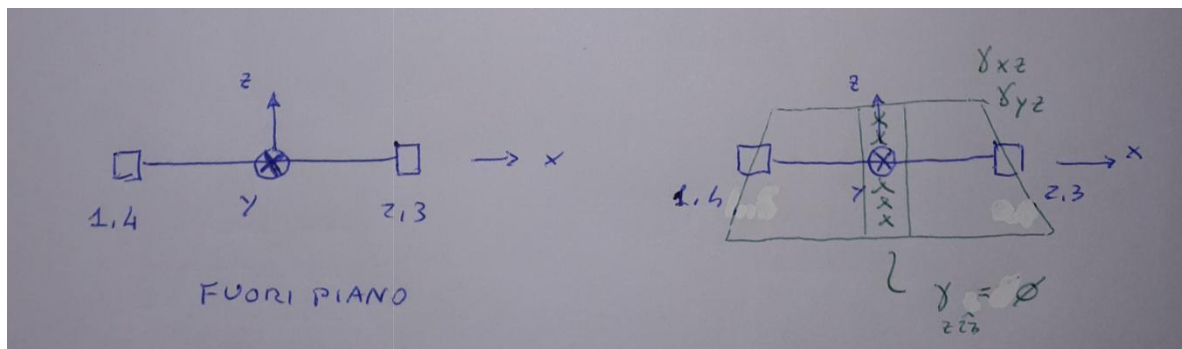
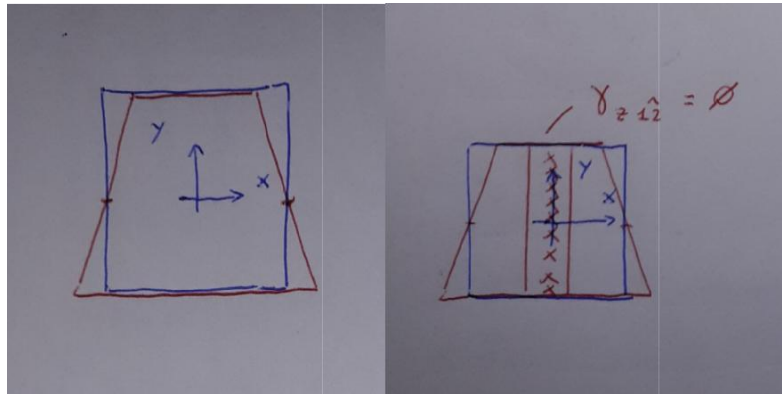
Possiamo dunque riassumere nel seguente modo:

- **Assumed strain**: mi permette di risolvere lo shear locking sia entro piano che fuori piano (guardando l'elemento piastra dal fianco)
- **Integrazione selettiva**: risolve il problema dello shear locking in piano ma non risolve quello fuori piano poiché impiega una regola di Simpson
- **Solid shell**: risolvono il problema dello shear locking fuori piano ma bisogna verificare che lo risolva anche nel caso entropiano perché non è scontato

Si considera ora come gestire lo *shear locking* fuori piano nell'elemento 75, in quanto non è stato individuato alcun metodo che lo risolva. In analogia con la tecnica di integrazione selettiva vista per lo *shear locking* entro piano il centroide è un punto in cui la $\gamma_{z 12}$ (deformazione γ_z orientata lungo

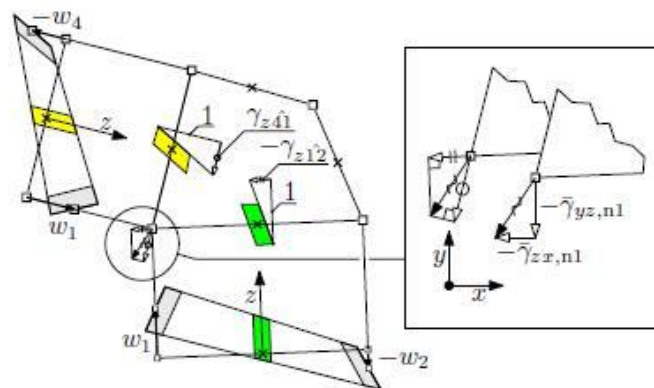
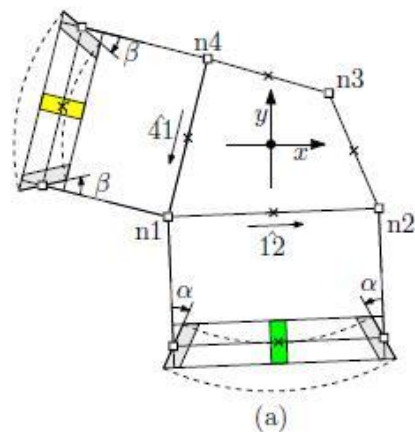
il lato 12) è nulla ovunque lungo tutto lo spessore, mentre è spuria e non nulla agli estremi.

Se campiono una componente di deformazione tagliante γ_{z12} soltanto a centro lato non vedo deformazione spuria, allo stesso modo campionando la γ_{z23} in mezzeria al lato non c'è alcuna deformazione tagliante spuria e quindi non noto lo *shear locking*.



Osservo che il centro lato è un punto privilegiato per campionare soltanto le componenti taglianti allineate lungo il lato.

Si nota ulteriormente che campionando le componenti taglianti γ_z lungo il rispettivo lato non vedo componenti spurie, nel caso ci fossero componenti non nulle questa componente è legittima, sovrapponendo gli effetti si genera una deformazione flesso-tagliante. Quindi se c'è la deformazione tagliante legittima e campiono le γ_{z12} e le γ_{z23} a centro lato la deformazione tagliante non spuria ma effettiva la vedo, il materiale nell'intorno del punto ha una forma parallelogramma da top a bottom.



Per visualizzare le γ , le posso immaginare come vettori proporzionali ai rispettivi vettori entropiano evidenziati come cateti nella figura sopra. Entrambe le γ le considero rappresentative di tutto quello che succede lungo i rispettivi lati di azione. Al nodo intersezione dei due lati ho la somma delle due componenti, dalle quali posso ricavare la deformazione γ (vettore orientato diversamente dalle direzioni dei lati). Questo vettore ci dice che un pezzo rettangolare di materiale si deforma scorrendo di una quantità data dalle componenti, su entrambe le direzioni di azione delle stesse. Lo stesso vettore può essere scomposto su x e su y con riferimento

al nodo in questione (queste componenti sono diverse, come si può vedere in figura, dalle proiezioni sui lati 41 e 12). Con questo sistema di campionamento allineato con il lato, a centro lato ed estrapolazione al nodo successiva, mi permette di definire componenti taglienti di deformazione fuori piano ai 4 nodi. Se ho valori nodali delle γ , posso usare le normali funzioni di interpolazione per derivare i valori nei punti di integrazione dai valori nodali. In questo modo però non ho un'integrazione selettiva ma viceversa definisco dei campi di γ_{zx} e γ_{zy} più complessi ma che non percepiscono il problema dello shear locking. Definisco il valore di γ_{zx} nei punti di integrazione (ovvero i punti di interesse poichè lì raccolgo il contributo energetico associato alle γ) tramite le funzioni di interpolazioni nel seguente modo:

$$\bar{\gamma}_{zx, n_1} \cdot N_1(\xi, \eta) + \bar{\gamma}_{zx, n_2} \cdot N_2(\xi, \eta) + \dots = \bar{\gamma}_{zx}(\xi, \eta)$$

\downarrow
 $+\frac{1}{\sqrt{3}}$

Il campionamento centrolato seguito da questa complessa estrapolazione ai punti di integrazione mi permette di non vedere la deformazione tagliente spuria (poichè il centrolato non le vede).

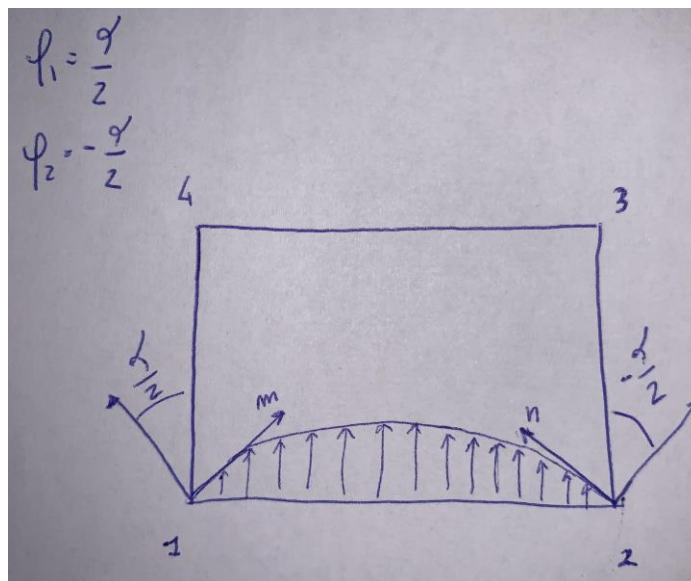
La differenza, e quindi lo sviluppo di tutti questi passaggi, si ritrova nella diversa composizione della matrice B che risulterà notevolmente più complessa nella seguente relazione:

$$\underline{B}_\gamma(\xi, \eta) \stackrel{d}{=} \begin{bmatrix} \bar{\gamma}_{zx} \\ \bar{\gamma}_{zy} \end{bmatrix}$$

Dalla sezione Help di Mentat si riporta:

“The transverse shear strains are calculated at the middle of the edges and interpolated to the integration points. In this way, a very efficient and simple element is obtained which exhibits correct behavior in the limiting case of thin shells”, affermazione che ci garantisce che l'elemento 75 non è soggetto al problema dello shear locking.

Un altro modo per risolvere il problema dello shear locking, questa volta in - plane, è quello di dare un senso ai moti di drilling. Il moto di drilling è una rotazione attorno ad un asse ortogonale al piano di una cella di un elemento finito. Nel nostro caso le rotazioni sono su assi ortogonale al piano, passanti per i nodi. In questo modo il nodo non risente della rotazione, a differenza dei lati, dei quali, attraverso la tecnica di spline, posso definirne gli spostamenti verticali. Considerando ad esempio un moto di drilling per i nodi 1 e 2 del mio elemento, e potendo definire una polinomiale tramite i vincoli di tangenza agli assi m ed n, ottengo una curva che mi può ben rappresentare l'incurvamento del mio lato:



Se riproduco le stesse rotazioni anche al lato superiore, mi avvicina maggiormente alla deformazione reale del mio elemento, migliorando quella che era una trasformazione a trapezio fino ad ora, eliminando lo shear locking. Per gli elementi di tipo piastra che hanno moto di drilling, questo può quindi essere usato per rappresentare campi di spostamento che incurvano (in realtà di sarebbero di ordine 3 dei quali però si mantiene solo la parabolica) il mio elemento invece che rimanere rettilinei ma con una componente spuria di taglio (questo è l'approccio utilizzato in Nastran per l'elemento CQUADR).

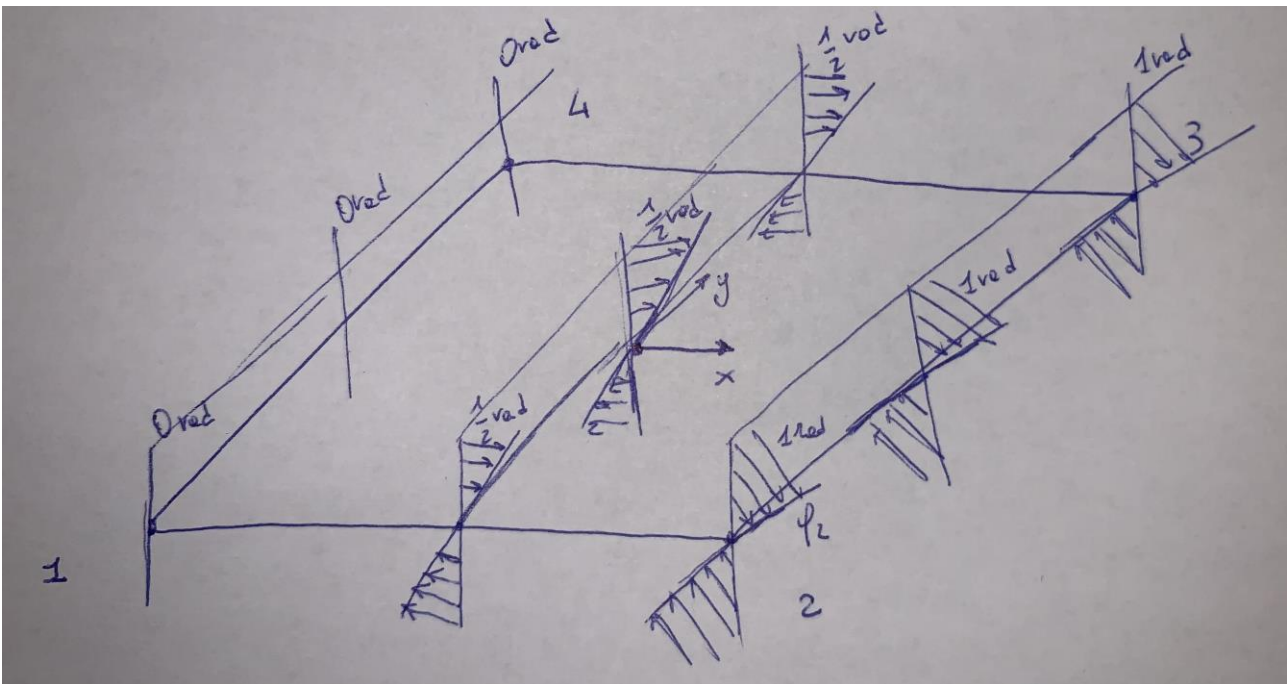
Qui terminano le tecniche di correzione dello shear locking, importanti per evitare di andare a sovrastimare la rigidità del componente.

MATRICE DI MASSA PER GLI ELEMENTI FINITI

Il nostro elemento è un elemento con caratteristiche elastiche, ha una matrice di rigidezza che associa ad uno stato deformativo delle forze da applicare per mantenere le reazioni elastiche associate a quello stato deformativo. Questa matrice di rigidezza è alla base di tutti i calcoli statici o quasistatici, poichè però molti calcoli sono dinamici, il materiale dell'elemento oltre a reagire elasticamente reagisce anche inerzialmente. Bisogna quindi caratterizzare l'elemento su entrambi gli aspetti, e per quanto riguarda quello inerziale gli si associa una matrice di massa, di fatto un'inerzia.

Facciamo riferimento ad un elemento e ad il suo volume, tra top e bottom, con un SdR locale xyz e uno isoparametrico z . Definiamo una matrice S che ha 3 righe, in ordine riempite con: spostamenti in x , spostamenti in y , spostamenti in z . Le colonne sono di numero pari al numero di DoF, ovvero 24 (considerando il drilling).

Per descrivere meglio cosa contiene ogni colonna, consideriamo un DoF specifico, ovvero la rotazione y del nodo 2, chiamata 2.



Impongo valore 1 rad al 2, mentre tutti gli altri DoF li impongo zero.

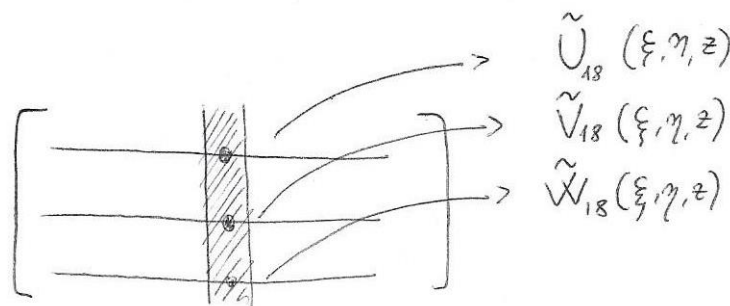
Quello che ottengo è che il segmento rigido normale alla superficie nel nodo 2 ruota in direzione y di 1 rad, che produce un campo di spostamenti su tutto il materiale (tranne nei punti in cui ho imposto 0 i DoF), ad esempio nel punto medio di 12 avrò una rotazione lungo y di $1/2$ rad. Anche se prendo una linea costante, per ogni punto di questa linea avrò uno spostamento intermedio tra quelli che ho al nodo 2 e al nodo 1.

Così riesco a definire gli spostamenti per tutti i punti che ho in x, y, z , andando ad applicare le funzioni di interpolazione (N_1, N_2, \dots) e le leggi della cinematica della piastra. Di fatto ottengo una funzione spostamento x associata al 18 DoF plottata a valore unitario, stessa cosa vale per y e per z .

$$\begin{bmatrix} u_x(\xi, \eta, z) \\ u_y(\xi, \eta, z) \\ u_z(\xi, \eta, z) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{24} d_i$$

Sono quindi funzioni di (ξ, η, z) definite avendo come input le leggi di interpolazione entro il piano di riferimento e la cinematica della piastra, quindi definite cinematicamente. Con queste 3 funzioni di x, y, z compongo la 18-esima colonna della matrice.

Quindi:



dove:

- \tilde{U}_{18} sono gli spostamenti x lungo i vettori punto per punto lungo l'elemento;
- \tilde{V}_{18} sono gli spostamenti y lungo i vettori punto per punto lungo l'elemento;
- \tilde{W}_{18} sono gli spostamenti z lungo i vettori punto per punto lungo l'elemento;

Per ogni grado di libertà ottengo un campo di moto entro l'elemento.

Se variassi tutti i gdl dell' elemento in maniera simultanea otterrei lo spostamento di ogni punto entro il volume dell'elemento andando a sommare i contributi di moto.

Riesco dunque definire un vettore spostamento proprio di ogni punto lungo il materiale della piastra descritto da (η, ξ, z) come coordinate:

$$\underline{u}(\xi, \eta, z) = \sum_{\substack{\uparrow \\ \text{matrice}}} S(\xi, \eta, z) \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{vettore contenente} \\ \text{i g.d.l. dell'elemento}}}{d}$$

questa dicitura è equivalente a:

$$\begin{bmatrix} u_x(\xi, \eta, z) \\ u_y(\xi, \eta, z) \\ u_z(\xi, \eta, z) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{24} d_i \begin{bmatrix} \tilde{U}_i(\xi, \eta, z) \\ \tilde{V}_i(\xi, \eta, z) \\ \tilde{W}_i(\xi, \eta, z) \end{bmatrix}$$

(es. $d_{18} = \varphi_z$)

di fatto abbiamo definito un campo di spostamenti come media pesata delle componenti unitarie dove il peso è il grado di libertà.

Per ogni elemento siamo in grado di descrivere il campo di moto indotto da una variazione del valore dei g.d.l. .

La matrice S non è funzione del tempo ma è definita dalla cinematica e dalle leggi di interpolazione, quindi la derivata del prodotto restituisce un unico termine (i gradi di libertà possono variare nel tempo):

$$\dot{\underline{u}}(\quad) = \underline{S}(\quad) \dot{d}$$

se stiamo parlando di g.d.l. di traslazione sono velocità lineari, mentre saranno velocità angolari in caso di g.d.l. di rotazione.

Viene ora semplice ottenere l'energia cinetica visto che ho le velocità punto per punto entro il volume:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \underline{\dot{u}}^T \underline{\dot{u}} \rho d\Omega$$

↙ volume infinitesimo

↑
densità puntuale del materiale

sostituisco ad \underline{u} la definizione data precedentemente:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} [\underline{S} \underline{\dot{d}}]^T [\underline{S} \underline{\dot{d}}] \rho d\Omega$$

dove $\underline{\dot{d}}^T$ sono le velocità dei g.d.l. e non variano sul dominio; \Rightarrow porto fuori dall'integrale.

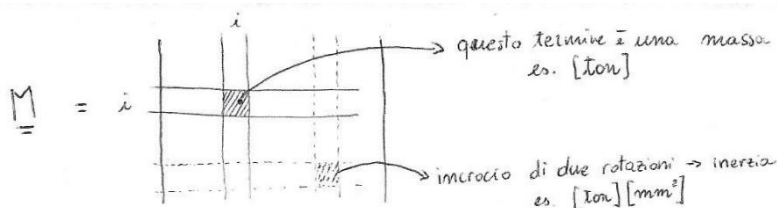
$\underline{\dot{d}}$ \rightarrow essendo post moltiplicato per una scalare (prodotto matriciale è commutativo) \Rightarrow può essere portato fuori dall'integrale.

Dunque:

$$\frac{1}{2} \underline{\dot{d}}^T \left[\iiint_{\Omega} \underline{S}^T \underline{S} \rho d\Omega \right] \underline{\dot{d}} = \frac{1}{2} \underline{\dot{d}}^T \underline{M} \underline{\dot{d}}$$

dove M è la matrice massa.

Quest'ultima ha termini che non sono coerenti: in particolare se prendiamo in considerazione termini diagonali:



L'elemento incrocio tra due spostamenti è una massa, se invece prendiamo l'elemento incrocio di due rotazioni, questo sarà un momento d'inerzia.

IMPORTANTE è non calcolare la norma di queste matrici poiché si andrebbero a sommare termini incoerenti a livello di unità di misura. Bisognerebbe in qualche maniera prima adimensionalizzare i vari elementi.

Vorremmo però ora una matrice di massa che leghi anche forze nodali e accelerazioni nodali. (sarà comunque la stessa matrice di massa? Sì).

La matrice di massa quantifica la risposta inerziale dell'elemento finito, la sua definizione è puramente una funzione della densità del materiale e le leggi cinematiche che vincolano il moto delle particelle di materiale entro l'elemento.

Se applico ai gradi di libertà dell'elemento un set di forze generalizzate (vettore F)

nella fittizia assenza di reazioni elastiche mi aspetto una risposta puramente inerziale.

Questo vettore F è applicato su nodi che si muovono con una velocità data nello spazio, in particolare $\dot{\mathbf{d}}$ definisce la derivata nel tempo istantanea dei g.d.l. (velocità traslazionali e rotazionali dei nodi).

La potenza è il prodotto scalare :

$$\text{POTENZA} \rightarrow \dot{\mathbf{d}}^T \mathbf{F}$$

ogni forza generalizzata compie lavoro su ogni spostamento associato ad essa.

Ho quindi anche variazione di energia cinetica:

$$\dot{\mathbf{d}}^T \mathbf{F} = \frac{dE_{kin}}{dt}$$

Allora risulta che posso legare le forze esterne alla seconda variazione del tempo dei valori di g.d.l. nodali.

Abbiamo quindi ottenuto la matrice di massa M per l'elemento finito. Siccome è una matrice densa (contiene anche termini non diagonali), simmetrica ma piena, l'integrazione di essa tramite la sua inversione comporta un costo computazionale parecchio elevato (dell'ordine di n^3 , dove $n = \text{g.d.l.}$).

Se avessimo a che fare con una matrice diagonale, avremmo, come inversa, sempre una matrice diagonale dove i termini sono uguali agli inversi dei termini diagonali della matrice di partenza. In questo caso il calcolo di questi n inversi comporta ad un costo computazionale dell'ordine di n^1 .

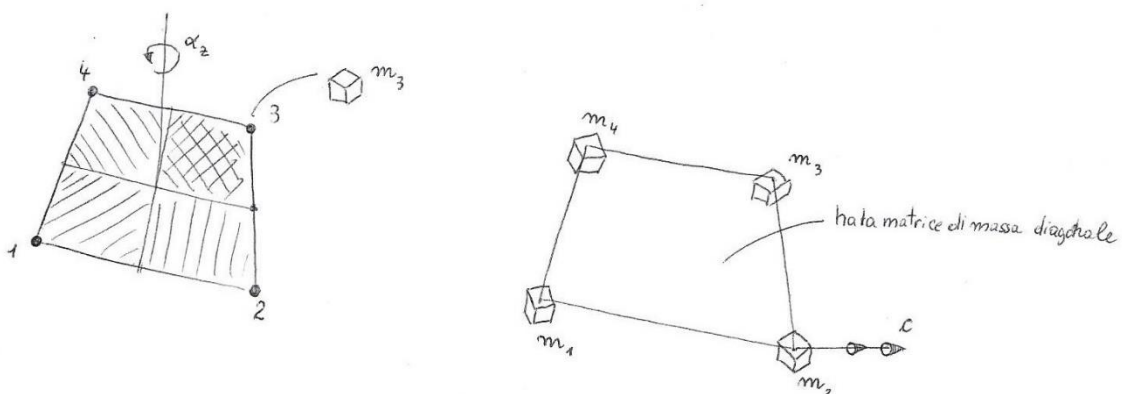
Devo quindi operare con una matrice di massa che è resa diagonalizzata: Matrice di massa a masse concentrate.

A discapito di un errore nel calcolo dell'energia cinetica.

La matrice di massa energeticamente consistente è una sola ho invece diverse definizioni per le matrici di massa diagonali.

L'elemento finito viene idealmente partizionato in domini d'influenza associati ad ogni nodo, ovvero se ho il mio elemento isoparametrico a 4 nodi (piastra) procedo come segue:

- Traccio la linea che va dal punto medio tra 4 e 3 al punto medio di 1 e 2 e la linea che va dal punto medio tra 1 e 4 al punto medio tra 2 e 3;
- Ho diviso la piastra in 4 quadranti e dichiaro che le masse dei diversi quadranti sono di pertinenza dei vari nodi associati;
- Ho creato un sistema a masse concentrate.



La matrice a masse concentrate è una matrice diagonale. Presenta però un piccolo difetto: se considero un'accelerazione attorno all'asse centroidale z (α_z accelerazione angolare) l'inerzia del materiale dell'elemento è minore

rispetto l'inerzia del sistema masse concentrate poiché tutta la massa viene concentrata ad una distanza massima dal centro di rotazione.

Ricapitolando la matrice di massa a masse concentrate prende correttamente l'energia cinetica associata ai moti di traslazione, ma sovrastima l'energia cinetica associata ai moti di rotazione.

Un secondo problema viene a galla applicando una coppia a un punto massa (es m_2).

Qual è l'accelerazione di un punto massa al quale viene applicato una coppia? Dipende dal suo momento di inerzia, ma nel momento in cui la sua massa è puntiforme non ha momento d'inerzia. Quindi a fronte di un'applicazione di una coppia nodale finita avrei un'accelerazione infinita. Questa conclusione è intollerabile perché vorrebbe dire che nella matrice massa diagonale avrei termini zero sulle rotazioni il cui inverso è m^{-1} avrà in loco $\frac{1}{0}$ (intollerabile).

E' quindi necessario inventarsi una strategia di definizione dei momenti d'inerzia di quelle masse concentrate (le masse concentrate non hanno momento d'inerzia).

Se si volesse quindi utilizzare questo sistema a masse concentrate in un codice basato sull'inversione massa (chiamati codici dinamici espliciti) bisogna associare qualche forma di momento d'inerzia, aumentando quest'ultimo ulteriormente, a quei nodi, peggiorando la situazione. L'aggiunta di queste inerzie rotazionali sono tuttavia necessarie per associare una limitata accelerazione angolare su coppie nodali non auto-equilibrate.