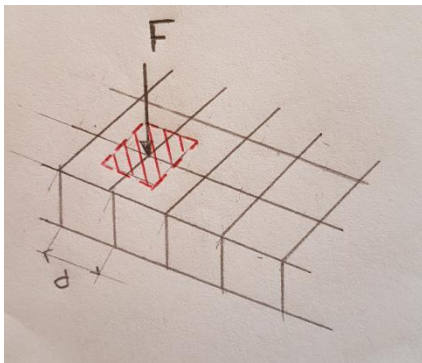


Singolarità tensionali

Si ricorda che con “singolarità tensionale” si intendono quelle situazioni in cui nel calcolo al FEM le tensione (e a volte anche gli spostamenti) divergono localmente all’infittirsi della mesh.

STRUTTURE 3D

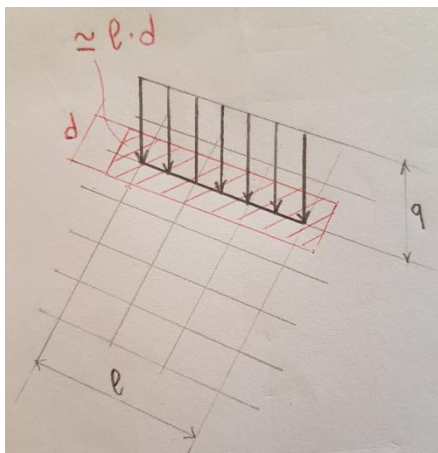


Si consideri una superficie con mesh di elementi brick e un carico concentrato. Il carico concentrato, sia che derivi da una forza esterna o da una connessione interna tra elementi, viene ripartito su un’area che è indicativamente pari alla taglia dell’elemento al quadrato d^2 .

Questo carico è equivalente alla pressione $\frac{F}{A}$ che al calare della mesh diverge dando l’effetto di singolarità.

Lo stato tensionale del punto caricato è singolare secondo la teoria dell’elasticità (che è continua con la teoria degli elementi finiti quando la mesh tende a dimensioni infinitamente piccole).

Quindi si hanno tensioni e cedimenti infiniti.



Nel caso del 3D è problematico il carico di linea.

Si consideri una struttura “meshata” con elementi di dimensione d e un carico di linea q distribuito su un segmento di lunghezza l (l non tende mai a zero è un’estensione macroscopica, se infittisco la mesh quella lunghezza rimane identica).

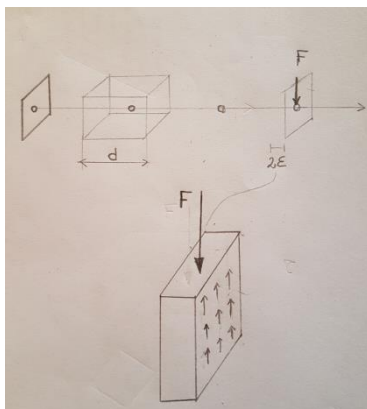
La sollecitazione si ripartisce su un’area la cui dimensione vale

approssimativamente $l \times d$. Per cui la pressione $p = \frac{q \times l}{l \times d}$ tende a infinito per d che tende a zero. Le tensioni sono infinite, divergono a infinito al calare della taglia della mesh. Anche gli spostamenti sono illimitati con andamento logaritmico.

Su elementi di questo tipo l’unica cosa che possiamo applicare che non generi singolarità sono pressioni distribuite.

Ovviamente quando la mesh è grossolana i carichi concentrati si possono applicare senza particolari problemi perchè verranno distribuiti implicitamente su aree abbastanza grandi.

TRAVI



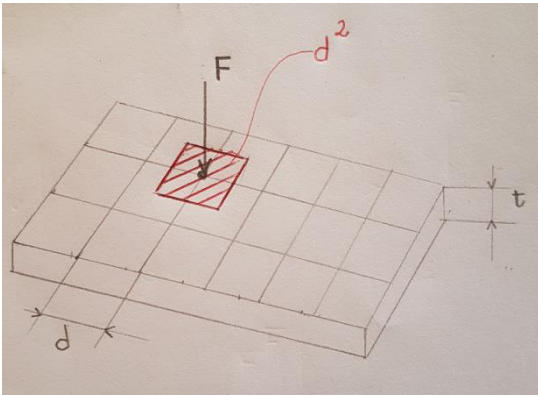
Gli elementi trave non hanno nessun problema di singolarità sotto nessun carico concentrato.

Se si applica una forza concentrata F su un nodo, si può immaginare implicitamente che venga applicata a un elemento di sezione A (sezione della trave) e spessore 2ϵ .

Il carico in realtà è equilibrato da delle sollecitazioni taglianti il cui valore medio è $\bar{\tau} = \frac{F}{A}$. $\bar{\tau}$ tende a zero per ϵ che tende a zero. Qualunque sia la lunghezza che si considera, queste tensioni non sono singolari, ossia non divergono al calare di ϵ e se si considera la taglia dell’elemento d come rappresentativo di ϵ , non divergono con la taglia dell’elemento.

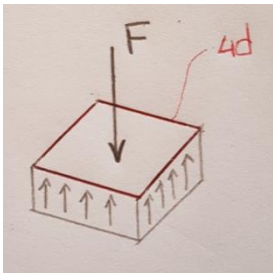
Quindi le travi possono portare carichi e coppie concentrate senza generare nessun tipo di singolarità.

PIASTRA



Si consideri una piastra di spessore t (che non diventa infinitesimo se la taglia della mesh cala) “meshata” con elementi di dimensione d e un carico concentrato applicato su un nodo.

La forza F può essere implicitamente ripartita su un volume di riferimento pertinente a questo nodo, la cui taglia in

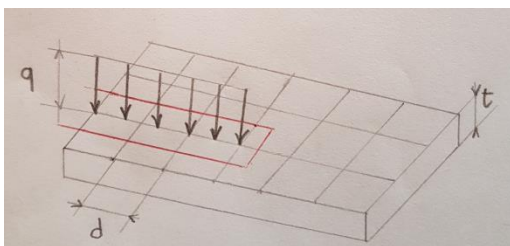


termini di area è d^2 . Se si estrae questo volume che circonda il nodo, ottengo un oggetto con perimetro $4d$ come ordine di grandezza. La forza F viene equilibrata da delle τ il cui valore medio vale $\bar{\tau} = \frac{F}{4d \times t}$. Queste tensioni tendono a infinito se d tende a zero, quindi sulle piastre se ho un carico concentrato le tensioni taglianti indotte $\bar{\tau}$ sono singolari al calare della taglia della mesh.

Fortunatamente a quelle tensioni taglianti non sempre corrisponde una deformazione tagliante. In particolare se la piastra è una piastra flesso-tagliante alla Mindlin, associata a questo stato tensionale si ha un cedimento nel punto caricato, quindi uno spostamento non

limitato. Quindi una piastra alla Mindlin che associa deformazioni taglianti infinite a tensioni taglianti infinite cede sotto un carico concentrato, perché il perimetro cala con d ma le τ crescono.

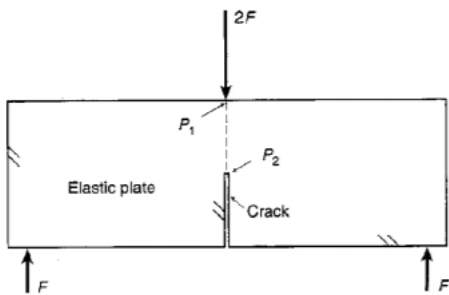
Se invece si utilizza una piastra che non ha le deformazioni taglianti (piastra alla Kirchhoff), le tensioni taglianti sono infinite ma non c'è un corrispondente deformativo. Per cui una piastra alla Kirchhoff può essere caricata da un carico concentrato senza generare singolarità né nelle tensioni flessionali né negli spostamenti.



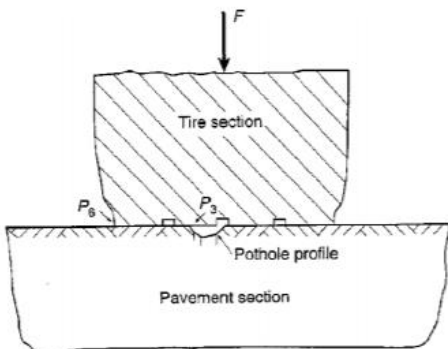
Viceversa se si applica un carico di linea q su una lunghezza l (che non varia con la taglia della mesh), questo carico viene distribuito su una superficie pari al perimetro (circa $2l$) per lo spessore t . Né il perimetro né lo spessore vanno a zero al calare della taglia dell'elemento. Quindi non c'è singolarità se una piastra viene caricata da un carico di linea.

ESEMPI DI SINGOLARITÀ

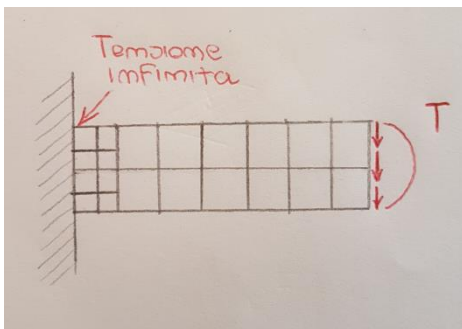
I casi qui riportati e discussi sono stati riassunti e presentati nella seguente pubblicazione: [sinclair_i.pdf](#)
(le figure cui si fa riferimento sono riportate a pagina 4 del documento)



Si tratta di un intaglio che può essere immaginato come un intaglio a V con angolo di 0° . Se il punto P_2 non è raccordato le tensioni sono infinite. In realtà ogni volta che si ha uno spigolo concavo non raccordato ci si aspetta una singolarità tensionale.

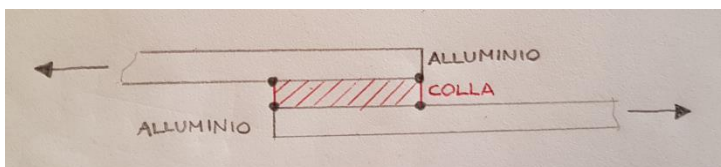


Questo è l'esempio di un asfalto supposto rigido e il battistrada di uno pneumatico deformabile. Quindi è una giunzione multimateriale tra elemento rigido e elemento deformabile. È possibile che sulle giunzioni multimateriale, in particolare sugli spigoli ci siano singolarità tensionali. Ad esempio abbiamo singolarità tensionale in tutti gli incollaggi. Nel punto P_6 si ha connessione tra elemento rigido e un elemento deformabile con trasmissione di σ e τ .



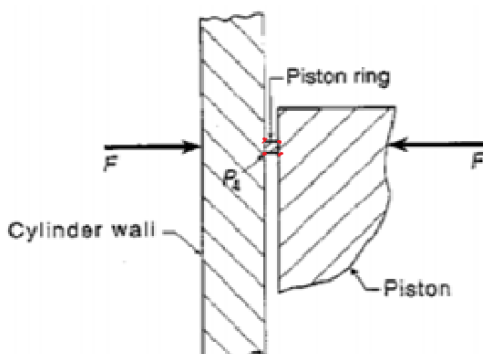
Il caso più simile a questo è la trave a sbalzo, modellata per esempio con degli elementi finiti come in figura. Se per esempio applico sulla faccia una tensione tagliante a distribuzione parabolica la cui risultante è T , la condizione di singolarità la ritrovo esattamente in corrispondenza dell'incastro, qui le tensioni sono per definizione infinito.

La tensione deve divergere con l'infittirsi della taglia della mesh. Mentre nelle strutture monomateriali qualsiasi angolo minore di 180° degli spigoli vivi è critico, andando ad analizzare in dettaglio il problema di connessione tra una superficie incastrata e una superficie libera la questione è un po' più complicata.

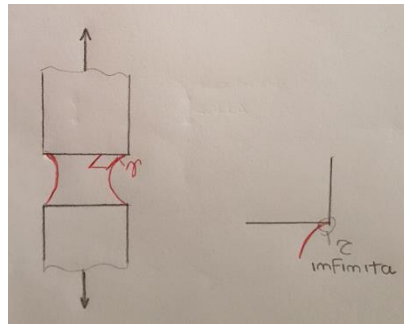
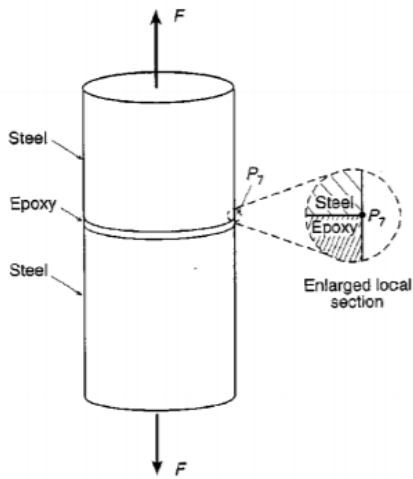


Si ha singolarità in tutti gli incollaggi.

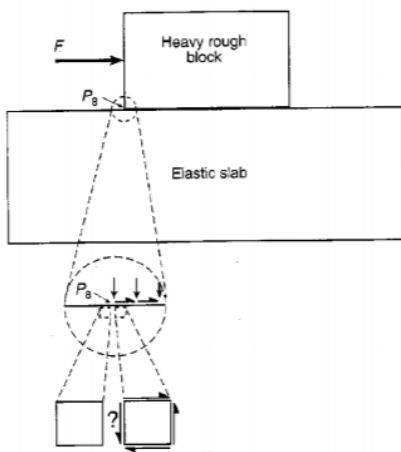
Se si prende un tipico incollaggio, il "single lap joint", in cui c'è una lamella superiore di alluminio uno strato di colla e una lamella inferiore di alluminio posto in trazione, si ha spigoli su giunzione multi materiale in 4 punti. Questi 4 punti sono tutti punti di singolarità tensionale.



La figura rappresenta una fascia elastica (piston ring). Si tratta essenzialmente di un corpo che a spigolo vivo indenta un altro corpo che a sua volta indenta un altro corpo. Ovunque ci sia un corpo che a spigolo vivo preme contro un altro c'è singolarità. Le tensioni nei 4 punti indicati in rosso sono infinite.

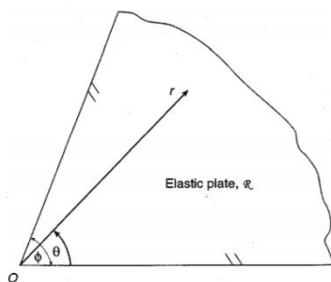


Si tratta di un caso di incollaggio con giunzione multi materiale (acciaio-resina epossidica-acciaio). Qui c'è singolarità perché se si applica un carico trattivo, l'acciaio tende ad andare in strizione molto meno del polimero. I 2 corpi in acciaio rimangono praticamente indeformati, mentre il polimero crea una specie di menisco. In corrispondenza della giunzione abbiamo quindi una deformazione di tipo γ (gamma) infinita.

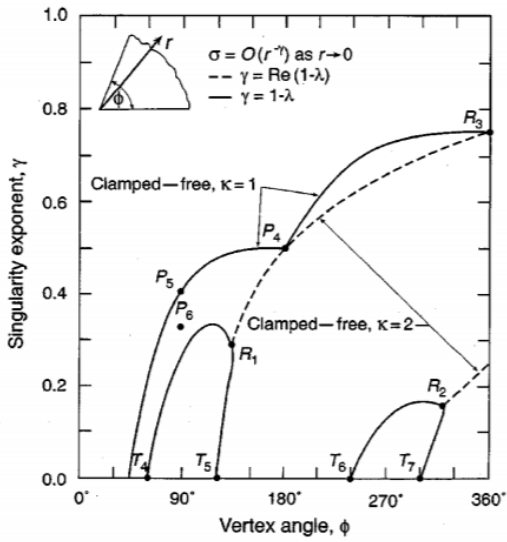


Si ha singolarità anche nei contatti con attrito, in corrispondenza della transizione tra assenza di pressione di contatto e la sua presenza. Perché se c'è pressione di contatto ci sono anche le forze di attrito, subito al di fuori del contatto le τ non possono esserci, mentre dentro il contatto ci sono e sono pari alla pressione per il coefficiente di attrito. C'è discontinuità nelle τ e quindi ci deve essere qualche punto di singolarità.

Mentre nelle strutture monomateriali qualsiasi angolo minore di 180° degli spigoli vivi è critico, andando ad analizzare in dettaglio il problema di connessione tra una superficie incastrata e una superficie libera la questione è un po' più complicata.



La figura a fianco rappresenta un "wedge" (cuneo). La singolarità dell'apice dipende dalla condizione di vincolo delle 2 superfici, dall'angolo e anche dal coefficiente di poisson del materiale. La tensione in corrispondenza dello spigolo è dell'ordine di $r^{-\gamma}$ $\sigma = O(r^{-\gamma})$ con r che tende a zero, quindi c'è una singolarità tensionale se γ è maggiore di zero.



Il grafico rappresenta un caso di clamped-free; ossia dei 2 lati che convergono sullo spigolo, uno è incastrato (clamped) e uno è free. Si consideri il caso con $k=1$ (k è la costante di Kolosov), si può notare nel grafico che la singolarità c'è solo quando γ è maggiore di zero. In basso abbiamo l'angolo di vertice ϕ , per ϕ piccoli abbiamo assenza di singolarità fino a un certo valore limite. Oltre a questo valore appare la singolarità con esponente che da zero si alza e cresce. Il grafico è ricavato dalla seguente formula

$$2 f[k(1-k)\sin^2 \lambda\phi + \lambda(1+k+2\lambda)\sin^2 \phi] = (1+k)(k \sin 2\lambda\phi - \lambda \sin 2\phi)$$

con $\lambda = 1-\gamma$.

Algoritmo Newton-Raphson per sistemi di equazioni non lineari

Consideriamo un sistema non lineare di n equazioni, nelle n componenti incognite, del vettore spostamenti/rotazioni nodali \underline{u} :

$$\underline{R}(\underline{u}) = \underline{F}(\underline{u})$$

- $\underline{R}(\underline{u})$: vettore delle azioni nodali necessarie a mantenere la struttura in equilibrio nello stato deformativo associato al vettore spostamenti nodali \underline{u} ; dove la matrice di rigidezza \underline{K} è funzione delle componenti spostamenti /rotazioni nodali, quindi $\underline{K} = \underline{K}(\underline{u})$. Nel caso particolare di sistema elastico lineare $\underline{R}(\underline{u}) = \underline{K}\underline{u}$;
- $\underline{F}(\underline{u})$: vettore componenti delle forze/coppie nodali applicate dall'esterno sul sistema, supposte note per una data configurazione della struttura; esse, possono infatti, essere funzione della specifica configurazione della struttura, cioè se si sposta il nodo può variare la forza applicata al nodo.

Un tipico esempio, di forza che varia al variare della configurazione della struttura, è quello di un rotore che per effetto di un errore di fabbricazione nasce sbilanciato. Il grado di libertà che vado a monitorare è lo spostamento centrifugo di una massa posta sul rotore, rappresentante il suo sbilanciamento. Ovviamente quello che succede è che al variare della distanza della massa dall'asse di rotazione, la forza centrifuga applicata all'albero per effetto dello sbilanciamento, aumenta linearmente, dal valore per lo stato indeformato $\omega^2 m \delta$ fino al valore $\omega^2 m (\delta + u)$ in configurazione deformata.

Altro esempio di carico che varia con la deformazione, è quello di una membrana su cui è applicata una certa pressione sulla sua superficie. Se consideriamo un elemento di questa membrana vediamo che su di esso è applicato un carico dovuto alla pressione, che è uguale alla pressione per l'area dell'elementino. Se agendo sul bordo della membrana, la stiriamo, la taglia dell'elemento può aumentare per via dell'azione di estensione che andiamo ad applicare. La pressione rimane la stessa e la deformazione della membrana fa sì che il carico raccolto da questo elemento, in seguito all'aumento di area, sia maggiore.

Nel caso ad esempio di un palloncino, il carico sull'elemento in esame cresce più che linearmente con la pressione, perché cresce linearmente al crescere della pressione ma poiché aumenta anche l'area degli elementi, cresce più che linearmente.

Quindi ci sono varie casistiche nelle quali il carico è funzione della configurazione deformata, e non solo del tempo.

Da una configurazione spostamento, è possibile ricavare quelle forze che è necessario applicare esternamente alla struttura, per mantenere una determinata configurazione deformativa. Per il caso lineare, quelle forze sono definite come il prodotto tra il vettore \underline{u} e la matrice di rigidezza \underline{K} .

Se il problema è non lineare la matrice di rigidezza è funzione del vettore \underline{u} .

Facciamo altre considerazioni sull'esempio precedente di rotore sbilanciato.

Rotore e supporti sono un sistema a rigidezza non uniforme perché per piccoli spostamenti u l'albero lavora principalmente a flessione mentre per grandi spostamenti può lavorare a sforzo normale (consideriamo il caso di un albero realizzato in gomma). Passando quindi da un caricamento puramente flessionale a un caricamento sempre più a sforzo normale, la rigidezza dell'albero può crescere.

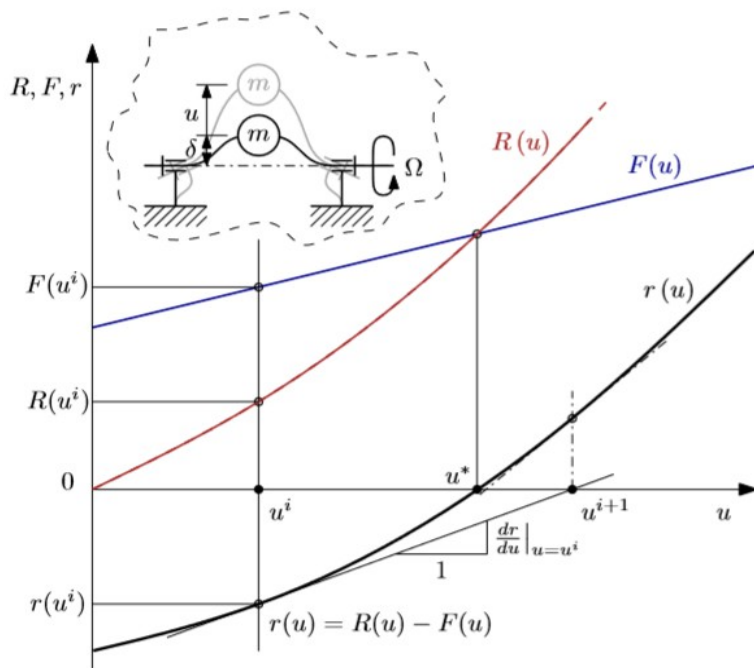


Figure 2: Costruzione grafica per l'iterato N-R, caso N=1

La linea blu rappresenta la variazione della forza esterna, che ha andamento lineare con la distanza della massa m dall'asse di rotazione dell'albero (forza centrifuga); invece la linea rossa, rappresenta la variazione delle forze che occorre applicare al punto massa per mantenerlo nella sua configurazione deformata. Queste ultime hanno andamento non lineare in seguito all'irrigidimento della struttura, dovuto all'aumentare della sua deformazione, e quindi della sua risposta sempre più a sforzo normale e non solo flessionale (ma ciò avviene se si ha a che fare con un albero in gomma che è in grado di deformarsi molto).

La soluzione del problema si ha all'intersezione delle due curve in cui le forze applicate dall'esterno sono effettivamente uguali alle forze nodali richieste.

L'equazione da risolvere è $R(u) = F(u)$ dove posso portare a primo membro il termine $F(u)$ e raccogliere quindi tutti e due i termini, in un unico termine **residuo**; quindi questa equazione $R(u) = F(u)$ la riscrivo come $r(u) = 0$ dove il residuo è definito come la differenza dei due termini $r(u) = R(u) - F(u)$. Il residuo è un disequilibrio nodale.

La funzione residuo la possiamo vedere graficata nella figura sopra, dove la soluzione del problema l'abbiamo nel punto u^* (soluzione spostamento), dove il valore del residuo si annulla.

Il metodo Newton-Raphson ha origine (ma solo origine, poi di fatto è indipendente) dallo sviluppo in serie di Taylor al primo ordine dell'equazione $r(u) = 0$, nell'intorno di un iterato i -esimo u^i ; è un metodo iterativo per cui è richiesta una soluzione di primo tentativo u^0 e un metodo per ottenere da questa soluzione di primo tentativo una soluzione di secondo tentativo poi di terzo poi di quarto, e così via fino alla soluzione finale se la successione converge.

Focalizziamoci sull'iterato: prendo uno spostamento che dichiaro essere uno spostamento di i -esimo tentativo (se $i=0$ è il valore di primo tentativo).

Se prendo una configurazione della struttura u^i e sviluppo l'equazione $r(u) = 0$ in serie di Taylor bloccata al primo ordine nell'intorno di quel punto, ottengo una forma linearizzata in u^i della funzione residuo.

Per calcolare il residuo in un punto diverso da u^i , ad esempio u^* , (soluzione dell'equazione dove so che il residuo si annulla) in seguito a tale linearizzazione, posso considerare il residuo calcolato in u^i , più la matrice jacobiana della funzione residuo calcolata in u^i (che contiene tutte le derivate prime che vi aspettate esserci in un termine dello sviluppo al primo ordine), per la distanza tra questo secondo punto u^* (in cui vogliamo calcolare il residuo) e il punto attorno al quale svolgo lo sviluppo, u^i , più un termine che è un o piccolo di questa distanza:

$$r(u^*) = r(u^i) + J_r(u^i) \cdot (u^* - u^i) + o(u^* - u^i) = 0$$

quindi il metodo N-R è costruito a partire dallo sviluppo in serie di Taylor al primo ordine dell'equazione $r(u) = 0$

nell'intorno di un punto di iterato i -esimo \underline{u}^i .

Assumo che per ogni configurazione io possa calcolare $\underline{R}(\underline{u})$, $\underline{F}(\underline{u})$ (quindi anche il valore del residuo) ed lo jacobiano $\underline{J}_r(\underline{u})$ della funzione residuo, e quindi tutte le derivate parziali di tale funzione.

Quindi dalla linearizzazione fatta precedentemente potrei calcolarmi l'unica incognita che ho, u^* , se non ci fosse il termine $o(\underline{u}^* - \underline{u}^i)$; decido allora di trascurare tale termine.

Visto che ho eliminato un termine che è un infinitesimo di ordine superiore, la soluzione u^* che vado a trovare non è più la soluzione esatta ma sarà un buon tentativo per l'iterato successivo e infatti da questa formula io vado a ricavare il passo di iterazione. Chiamerò quindi la soluzione che trovo, non più u^* , ma \underline{u}^{i+1} .

Di fatto il residuo in u^* è uguale a zero. Ottengo quindi la formula per svolgere le iterazioni:

$$\underline{r}(\underline{u}^*) = \underline{r}(\underline{u}^i) + \underline{J}_r(\underline{u}^i) \cdot (\underline{u}^{i+1} - \underline{u}^i) = \underline{0}$$

questo oggetto mi diventa un sistema di n equazioni, nelle n incognite \underline{u}^{i+1} , quindi di fatto posso scrivere che \underline{u}^{i+1} è definito come $\underline{u}^{i+1} = \underline{u}^i - \underline{J}_r(\underline{u}^i) \setminus \underline{r}(\underline{u}^i)$, dove ho utilizzato la notazione di Matlab.

Notazione Matlab:

$\underline{x} = \underline{A} \setminus \underline{b}$ significa che io prendo un sistema di equazioni la cui matrice è \underline{A} , il termine noto è \underline{b} , lo risolvo, e la soluzione l'associa in x .

Se fosse uno scalare il significato sarebbe: $x = \frac{b}{A}$

Quindi utilizzando la notazione Matlab, scrivo come prima:

$\underline{u}^{i+1} = \underline{u}^i - \underline{J}_r(\underline{u}^i) \setminus \underline{r}(\underline{u}^i)$ dove l'iterato successivo è definito come l'iterato precedente meno la soluzione del sistema lineare, la cui matrice di sistema è lo jacobiano del residuo calcolato in \underline{u}^i , il termine noto è il residuo calcolato in \underline{u}^i .

Questo è il passo iterativo del metodo Newton-Raphson!!!

Jacobiano della funzione residuo

Lo Jacobiano della funzione residuo r calcolato al punto \underline{u}^i , è definito come:

$$[\underline{J}_r(\underline{u}^i)]_{l,m} = [\underline{J}_r^i]_{l,m} = \left. \frac{\partial r_l}{\partial u_m} \right|_{\underline{u}=\underline{u}^i}, \quad l, m = 1 \dots n$$

cioè una matrice il cui elemento alla riga l colonna m è la derivata della l -esima componente del residuo nella m -esima variabile indipendente. Questa derivata viene calcolata in \underline{u}^i .

Possiamo anche dire che, lo Jacobiano della funzione residuo è uguale alla differenza dei jacobiani della funzione $\underline{R}(\underline{u})$ e della funzione $\underline{F}(\underline{u})$.

Questo jacobiano è la cosa più simile che abbiamo al concetto di matrice di rigidezza, nel senso che scala dei disequilibri per ottenere una variazione di configurazione. In molti casi, lo jacobiano, è anche chiamata matrice di rigidezza tangente.

Bisogna ricordare, che questa matrice di rigidezza tangente, è funzione anche dei carichi se i carichi variano con la configurazione.

Sostanzialmente si tratta di una matrice che lega, la variazione di configurazione, con la variazione del residuo.

Caso strutturale

Nel caso strutturale utilizzo N-R, non su un livello di carico singolo, ma su una serie di livelli di carico (infatti abbiamo sempre messo più di uno step nei nostri loadcase quasi statici); ciò vuol dire che noi abbiamo un obiettivo di carico finale da applicarsi o di spostamento da applicarsi, ma abbiamo deciso di suddividere l'analisi in tanti piccoli step. Supponiamo di aver utilizzato 100 step, in un intervallo temporale che va da tempo zero a tempo un secondo. Al tempo zero, ho un ciclo N-R che mi ricava la soluzione al tempo e al livello di carico associato al tempo 0,01; N-R utilizza l'indefornata \underline{u}^0 come soluzione di primo tentativo ($\underline{u}^0 = \underline{0}$).

Una volta fatto ciclare N-R, io ottengo la configurazione del sistema a tempo 0,01 che tipicamente è 1/100 del carico finale (se diamo rampe lineari). A quel punto, nota la configurazione al tempo 0,01 devo ricavare quella al tempo 0,02; e allora cosa uso come soluzione di primo tentativo di questa seconda iterazione N-R? → la soluzione all'iterato precedente (cioè la soluzione al livello di carico precedente).

Quindi prendo la deformata al livello di carico 0,01 e la uso come soluzione di tentativo zero per trovare la configurazione della struttura a 0,02, e così via.

Bisogna quindi fornire una soluzione di primo tentativo u^0 che di solito viene presa dalla soluzione dell'iterato N-R applicato al livello di carico precedente e se non c'è un livello di carico precedente parto dallo scarico e dall'indefornato.

Perché spezzetto il mio carico finale in tanti piccoli gradini, e non lo applico tutto istantaneamente?

Perché N-R applicato a problemi strutturali non converge sempre, nessun teorema che garantisce la convergenza è applicabile e quindi non è mai scontata la sua convergenza.

Un elemento chiave per facilitare la convergenza del metodo n-R è dando una configurazione di tentativo iniziale molto vicina alla soluzione vera; ciò è possibile soltanto suddividendo la mia configurazione iniziale in tanti piccoli step intermedi che presentano configurazioni quasi uguali fra loro.

Quando io spezzetto la mia rampa di carico in tanti incrementi, semplicemente lancio una molteplicità di iterazioni N-R ognuna delle quali parte da una configurazione del sistema che non è così lontana da quella di arrivo.

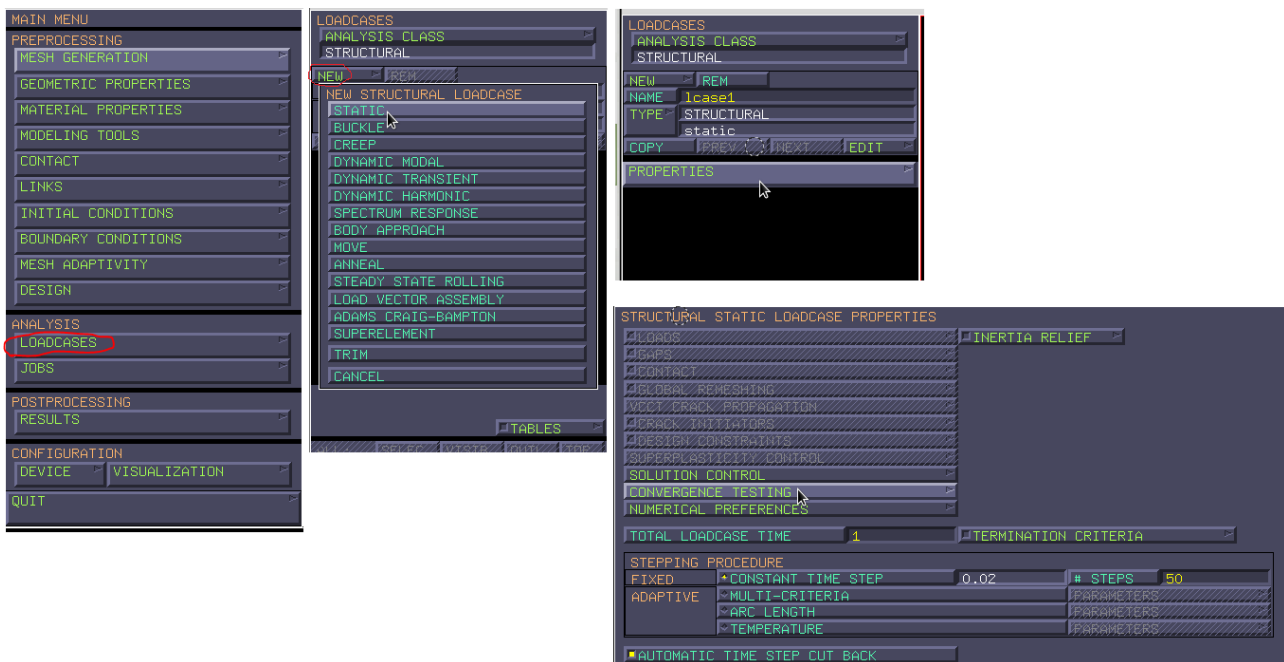
Calando il numero di incrementi nel loadcase, io chiedo a N-R di fare salti più grandi nello spazio delle configurazioni, aumentando il rischio di non convergenza.

Convergenza dell'iterato Newton-Raphson

Una volta definito il passo con cui eseguire le iterazioni, devo decidere quando considerare il risultato che mi forniscono tali iterazioni, accettabile, per poter stabilire di essere arrivato a convergenza.

Nel Marc, andando in:

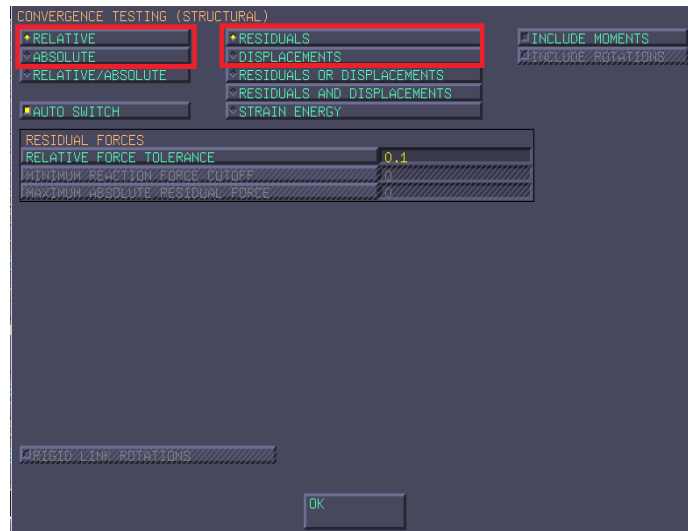
MAIN MENU > LOADCASE > NEW > STATIC > PROPERTIES > CONVERGENCE TESTING



Ci sono due possibilità, o stabilisco la convergenza ai residui, oppure alle incognite (sugli spostamenti).

Per entrambi i casi dovrò stabilire una tolleranza, che potrà essere, assoluta oppure relativa.

MAIN MENU > LOADCASE > NEW > STATIC > PROPERTIES > CONVERGENCE TESTING >.....

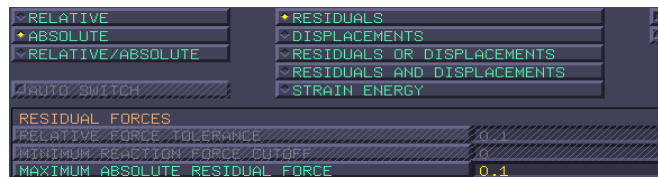


Convergenza ai residui:

Nota la configurazione $\mathbf{u}^i \rightarrow$ la uso per calcolare $\mathbf{u}^{i+1} \rightarrow$ calcolo il residuo in $\mathbf{u}^{i+1} \rightarrow$ ne prendo una qualche forma di norma e se questa norma è minore di una tolleranza, dichiaro la convergenza ai residui. Per quanto riguarda la tolleranza, in Marc posso mettere:

- *tolleranza assoluta* dove inserisco le MAXIMUM ABSOLUTE RESIDUAL FORCE, e quindi il metodo N-R si ferma quando il residuo è al di sotto della soglia assoluta:

$$\|\mathbf{r}(\mathbf{u}^{i+1})\| \leq \epsilon_r$$

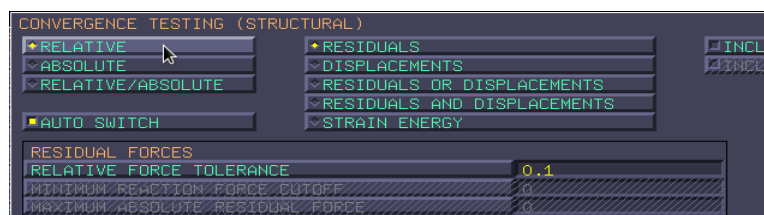


- se utilizziamo la *tolleranza relativa*; la domanda è! Relativo a che cosa?

Il Marc stabilisce il valore percentuale rispetto alla massima componente di reazione vincolare (se inserisco 0,1 la tolleranza sarà il 10% della massima componente di reazione vincolare).

Ma se il nostro sistema è auto equilibrato e i vincoli sono solo sugli spostamenti, cosa succede?

In questo caso abbiamo che la reazione vincolare massima è 0, perchè i vincoli di posizionamento prendono solo i disequilibri, che però, in questo caso non ci sono. Di conseguenza l'iterazione N-R non si fermerà mai in quanto non riuscirà mai a raggiungere il valore di tolleranza, che in questo caso è zero.

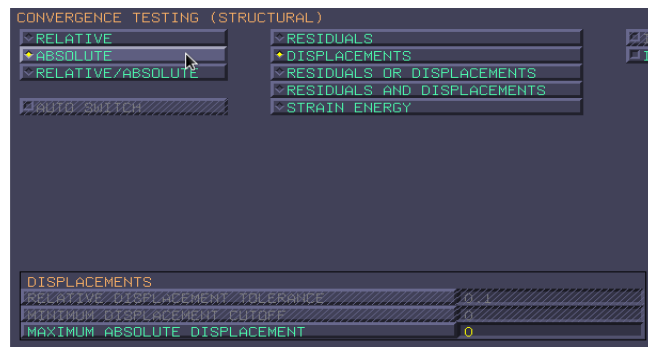


Convergenza agli spostamenti

In generale è definita come la convergenza alle incognite, ma nel caso specifico le incognite sono gli spostamenti. Mi fermo con l'iterazione quando la differenza tra la soluzione trovata all'iterato $i+1$ (cioè quella appena trovata) e quella trovata all'iterato precedente, i , scende al di sotto di una certa soglia. Quando vedo che sto correggendo la mia soluzione, troppo poco, mi fermo. Anche in questo caso dovrò dare una tolleranza che può essere assoluta (in millimetri, o radianti se considero anche le rotazioni) oppure relativa.

- *tolleranza assoluta* implica che l'iterazione viene fermata quando è verificato che

$$\|\mathbf{u}^{i+1} - \mathbf{u}^i\| = \|\delta \mathbf{u}^i\| \leq \epsilon_u, \text{ con } \epsilon_u \text{ errore assoluto ammesso alle incognite;}$$

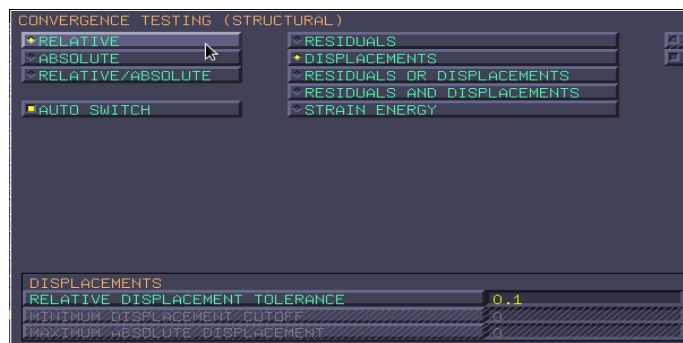


– *tolleranza relativa*

Se chiedo, ad esempio, una convergenza al 10%, significa che rispetto al modulo della differenza degli ultimi due valori \mathbf{u}^i trovati, dovrò avere:

$$\|\mathbf{u}^{i+1} - \mathbf{u}^i\| \leq 0,1 \cdot \|\mathbf{u}^{i+1} - \mathbf{u}^0\|$$

Dove \mathbf{u}^0 è la soluzione al livello di carico precedente ; $\|\mathbf{u}^{i+1} - \mathbf{u}^0\|$ è la distanza tra lo spostamento andato a convergenza, per il livello di carico precedente e quello che sto misurando adesso. Questo diciamo è il salto nella configurazione, tra il livello precedente e quello che sto calcolando adesso, e uso questo oggetto, come valore assoluto rispetto al quale definire il termine relativo a convergenza del N-R.



Ovviamente nel caso gli spostamenti, tra un livello di carico precedente e l'attuale sono molto grossi, rischio di avere risposte con precisione grossolana.

Convergenza Newton-Raphson – casi lineari

Se applichiamo N-R a un sistema di tipo lineare la convergenza ai residui l'abbiamo al primo step N-R ; perchè lui risolve la linearizzazione di un problema che è lineare, quindi risolve il problema.

La soluzione ha residuo nullo, quindi se applichiamo N-R a un problema lineare o a un problema che in quello stato di carico si comporta linearmente, questo oggetto converge alla prima iterazione N-R.

La convergenza alle incognite, non può invece convergere alla prima iterazione, perchè deve confrontare un iterazione con la precedente, quindi gliene servono almeno due. Ovviamente, per i problemi lineari questo secondo ciclo è totalmente ridondante, perchè iterato precedente e iterato successivo risulteranno uguali. Quindi con questo metodo uscirò dall'iterazione N-R al secondo ciclo.

Forma algoritmica iterazione Newton-Raphson

Scrittura in forma algoritmica, dell'iterazione Newton Raphson:

Algorithm 1 Iterato N-R base

Require: \underline{u}^0

Require: $r(\underline{u}^i)$ calcolabile $\forall \underline{u}^i$ di iterato

Require: $J_r(\underline{u}^i)$ calcolabile $\forall \underline{u}^i$ di iterato, e non singolare

$i \leftarrow 0$

while $(\|r(\underline{u}^i)\| \geq \epsilon_F) \vee (i \geq 1 \wedge (\|\underline{u}^i - \underline{u}^{i-1}\| > \epsilon_u))$ do

$$\begin{aligned} \underline{K}^i &\leftarrow J_r(\underline{u}^i) \\ \underline{r}^i &\leftarrow r(\underline{u}^i) \\ \underline{\delta u}^i &\leftarrow -\underline{K}^i \setminus \underline{r}^i \\ \underline{u}^{i+1} &\leftarrow \underline{u}^i + \underline{\delta u}^i \\ i &\leftarrow i + 1 \end{aligned}$$

⇒ con questi comandi assegno i valori che calcolo, alle variabili;

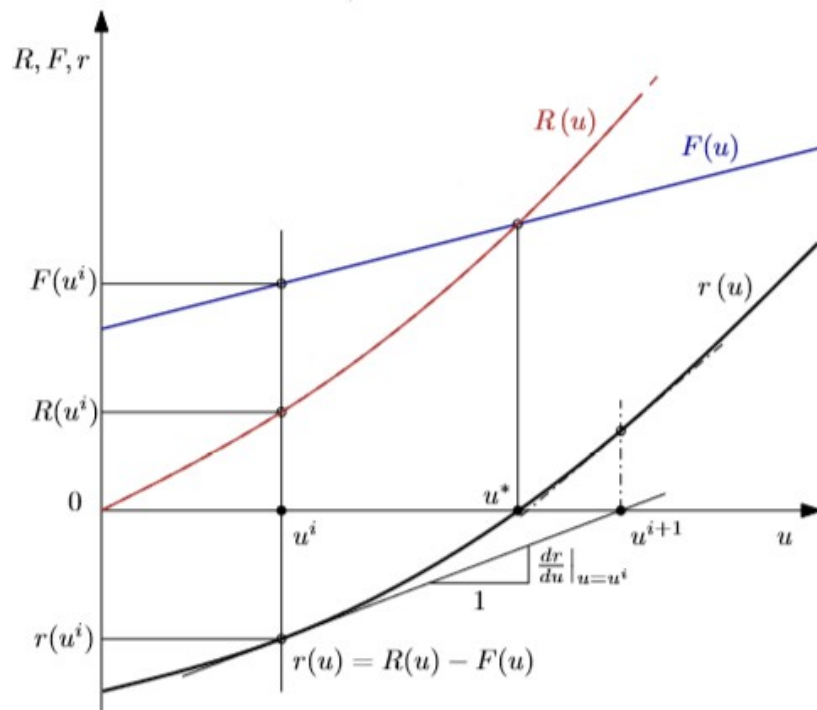
⇒ assegno zero alla variabile i

⇒ v , ha il significato di or, e lo utilizzo per fare un doppio controllo sulla tolleranza; cioè sia un controllo ai residui che sugli spostamenti;

end while

$\underline{u}^* \leftarrow \underline{u}^i$ ⇒ una volta che sarà stata verificata la tolleranza richiesta, avrò l'uscita dal ciclo, e l'assegnazione del valore della soluzione.

Caso unidimensionale - costruzione grafica per l'iterato Newton-Raphson



Di fatto si tratta di una linearizzazione della funzione residuo, tramite la sua tangente in un punto (linearizzo sulla tangente).

Prendo u^i di primo tentativo → calcolo il residuo $r(u^i)$ in u^i → calcolo lo Jacobiano $\left(\frac{dr}{du}\right)_{u=u^i}$, (che di

fatto è la tangente alla funzione residuo, calcolata in u^i) e il sistema di equazioni lo risolvo graficamente, andando a trovare l'intersezione tra la retta tangente alla funzione residuo, calcolata in u^i , con l'asse delle ascisse. Che è il punto in cui si annulla la forma linearizzata, del residuo.

In tale intersezione trovo u^{i+1} .

Di fatto questa intersezione è la resa grafica della soluzione del sistema di equazioni, nel caso unidimensionale.

Per u^{i+1} trovato ripeto la procedura; cioè vado a calcolare il suo residuo $r(u^{i+1})$ → calcolo la tangente

$\left(\frac{dr}{du}\right)_{u=u^{i+1}}$ (la matrice Jacobiana) → trovo quindi la nuova retta che mi linearizza i valori del residuo, e la cui

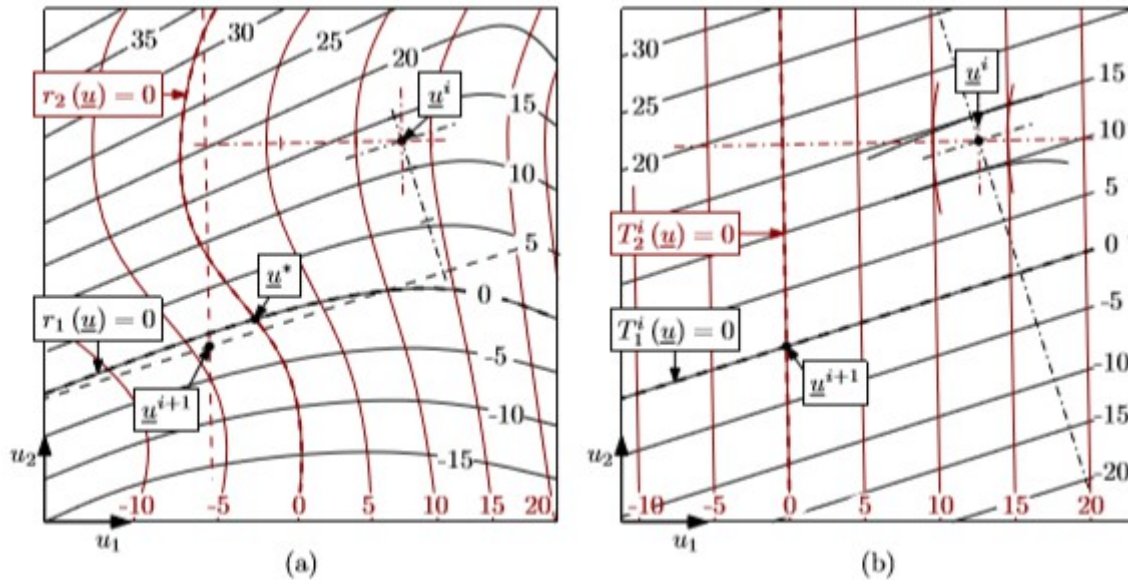
intersezione con l'ascissa u mi fornisce il nuovo valore u^{i+2} (u^* se ho raggiunto la soluzione).

La tolleranza sugli spostamenti è misurata come distanza tra u^i e u^{i+1} e se tale distanza è minore della soglia,

dichiaro la convergenza agli spostamenti.

Viceversa la tolleranza sui residui la faccio sulla distanza tra il valore di residuo e lo zero; e se tale segmento è più piccolo della mia soglia dichiaro la convergenza ai residui.

Caso bidimensionale: accenno soluzione grafica iterato Newton-Raphson



Abbiamo un sistema a due incognite u_1 e u_2 . Spaziando in questo piano, spazio le possibili configurazioni del mio sistema. Per ogni combinazione di u_1 e u_2 ho un valore di residuo. Queste funzioni residuo sono state plottate come mappe altimetriche; in particolare, in nero abbiamo le linee altimetriche rappresentative il luogo dei punti della funzione residuo prima componente, avente un certo valore costante. In rosso, invece, è plottata la funzione residuo seconda componente.

Possiamo dire che nel grafico sono rappresentate due superfici residuo, ognuna rappresentativa di una componente.

Ovviamente la soluzione del mio problema si trova all'intersezione tra il luogo dei punti in cui la prima componente della funzione residuo è nulla e il luogo dei punti in cui la seconda componente della funzione residuo è nulla (u^* in figura).

Come si fa a rappresentare il passo di iterato N-R per queste due funzioni?

Considero il punto di partenza u^i . Per ognuna delle due superfici residuo, ricavo il piano tangente, nel punto u^i . Il calcolo del residuo, per la prima e la seconda componente, e dello jacobiano mi permette di avere due piani tangenti.

Nella seconda mappa (b), le linee altimetriche dei due piani tangenti sono rette equispaziate, in quanto le due superfici dei residui dell'immagine "a" le ho trasformate in due superfici piane.

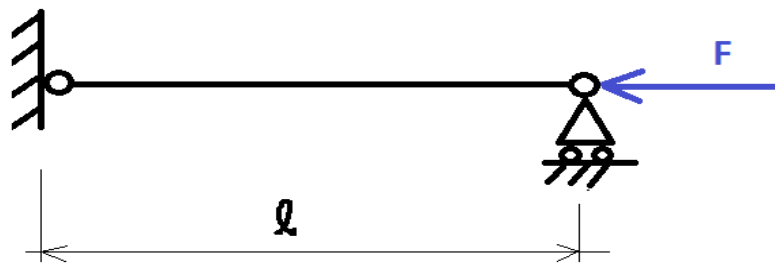
Quello che faccio ora su questa forma linearizzata delle funzioni residuo è prendere l'intersezione tra il luogo dei punti nei quali la forma linearizzata del residuo prima componente è zero, e il luogo dei punti in cui la forma linearizzata seconda componente è zero (che sono le due rette altimetriche con quota 0).

Il punto di intersezione è la soluzione cercata u^{i+1} .

La convergenza agli spostamenti ce l'ho quando la norma del vettore che va da u^{i+1} a u^i scende al di sotto della soglia impostata.

Estensione a strutture complesse dell'instabilità della colonna Euleriana

Estendiamo ora alle strutture complesse, che modelleremo tramite FEM, il concetto di instabilità della colonna Euleriana.



Consideriamo una trave incernierata e supportata, di lunghezza l da vincolo a vincolo, e caratterizzata in sezione da una rigidezza torsionale EJ , e rigidezza assiale EA .

La trave è caricata da un carico F che sappiamo poter causare una deformazione di questa colonna che non è puramente compressiva ma può diventare flessionale.

Esiste un valore di questo carico, che viene chiamato carico critico.

I carichi critici sono sempre più di uno e di solito si va a considerare il più basso di tutti, che è quello probabilmente più prossimo al livello di carico che effettivamente applico. Non si sale mai al di sopra del primo carico critico perchè la soluzione di equilibrio diventerebbe instabile; non è come le risonanze che uno può far lavorare la struttura al di sopra di una frequenza di risonanza.

Il più basso carico critico è valutato in funzione delle proprietà della trave, e in questo caso si calcola come:

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$$

Questo carico si ricava con un'equazione differenziale del secondo ordine che deriva dall'impostazione dell'equilibrio sulla deformata.

È la prima volta che consideriamo il problema dell'equilibrio del concio di trave in configurazione deformata.

L'equilibrio svolto sulla configurazione deformata è l'equivalente, di una condizione di analisi di risposta non lineare.

In corrispondenza di questo carico critico, appare a fianco della banale soluzione lineare elastica, che prevede una compressione della trave uniforme, una inflessione che di fatto è uno spostamento trasverso con forma sinusoidale.

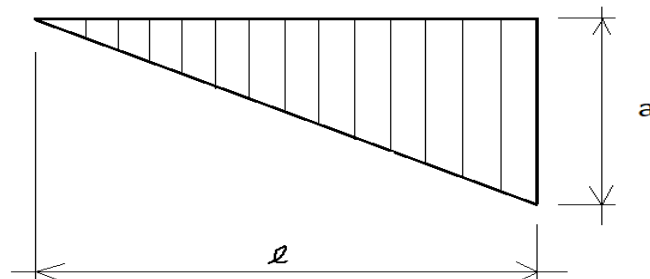
La struttura viene studiata considerando due gradi di libertà.

Il *primo grado di libertà* modula la soluzione lineare elastica compressiva.

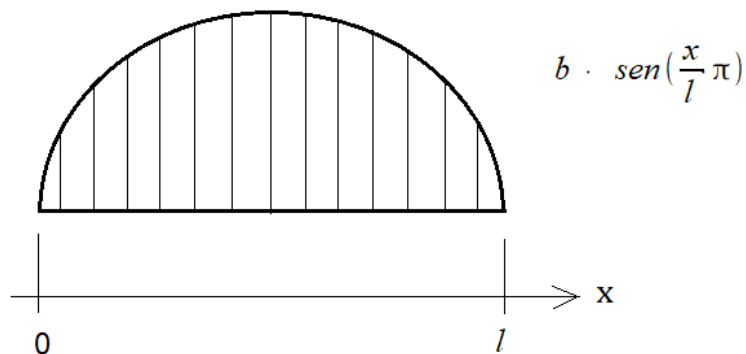
In pratica prendo ogni punto della mia barra e immagino che ogni punto trasli in direzione assiale di una quantità che varia linearmente da zero, al primo estremo, a un valore massimo al secondo estremo; ossia per ogni sezione della trave ho uno spostamento assiale, che via via è più piccolo, spostandomi dal carrello verso la cerniera.

Il valore a è il mio primo grado di libertà; e modula gli spostamenti assiali, dovuti alla soluzione di compressione uniforme, che variano linearmente dall'estremo incernierato, all'estremo supportato.

Variando a , vario tutti gli spostamenti trasversali dei punti della trave:



Il *secondo grado di libertà* lo prendo ispirandomi alla soluzione vista nei libri per questo carico critico. Per cui dico che il secondo grado di libertà, per la mia trave, è uno spostamento trasversale modulato sinusoidalmente, non parabolicamente, da estremo a estremo; con “b” valore di picco che prendo per il secondo grado di libertà:



A questo punto io dichiaro che gli spostamenti di ogni punto della struttura sono dati da quelle due forme elementari modulate una per a e una per b ; per cui i gradi di libertà della mia struttura sono a e b . Implicitamente, facendo ciò, ho imposto un sistema di vincoli che vieta ogni altro possibile moto della struttura, in particolare una deformazione a spostamento trasverso che va su poi va giù, è vietata cioè non la considero.

A questo punto posso disegnare un grafico di comportamento della struttura al crescere del carico, che per ogni valore del carico mi da la deformazione della struttura nelle due variabili a e b . Quindi la struttura evolverà nello spazio a, b, F , come di figura:

