

TRAVI CURVE

Sezioni composte

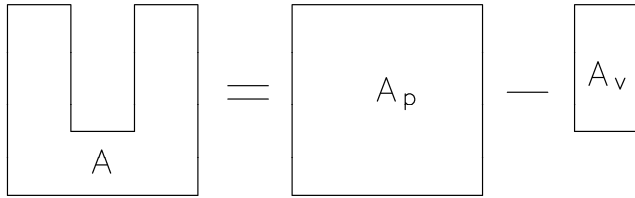


Figura 1

Si considerano sezioni composte, cioè sezioni che possono venire interpretate come somma o differenza di sezioni aventi una forma sperabilmente più semplice di quella iniziale. Si considera per esempio la sezione A di Figura 1, che può venire pensata come la sottrazione tra due sezioni, l'area piena A_p , e l'area vuota, A_v . L'asse passante per il centro di curvatura della trave è rappresentato in basso in Figura

1, e da partire da esso vanno misurati i raggi.

Si vogliono sviluppare formule che permettano di calcolare il raggio dell'asse neutro r_n ed il raggio baricentrico r_g della sezione A, combinando opportunamente i raggi dell'asse neutro e baricentrico delle sezioni A_p ed A_v . Tali espressioni sono necessarie per valutare le tensioni flessionali nelle travi curve.

Si considera nel seguito la valutazione del raggio dell'asse neutro r_n . La formula generale di r_n è

$$r_n = \frac{A}{\int_A \frac{dA}{r}} \quad (1)$$

Con riferimento alla Figura 1, l'area A al numeratore della (1) può venire intesa come la differenza tra A_p ed A_v . Similmente, per la proprietà additiva degli integrali, l'integrale al denominatore di (1) può venire inteso come la differenza tra due integrali, che si riferiscono rispettivamente all'area piena A_p e vuota A_v . Vale infatti la relazione

$$\int_A \frac{dA}{r} = \int_{A_p} \frac{dA_p}{r} - \int_{A_v} \frac{dA_v}{r} \quad (2)$$

La formula di r_n relativa all'area A assume quindi la forma

$$r_n = \frac{A_p - A_v}{\int_{A_p} \frac{dA_p}{r} - \int_{A_v} \frac{dA_v}{r}} \quad (3)$$

Per semplificare ulteriormente la formula (3) della valutazione del raggio dell'asse neutro r_n relativa all'area A, si osserva che, per una sezione generica A

$$r_n = \frac{A}{\int_A \frac{dA}{r}} \Rightarrow \int_A \frac{dA}{r} = \frac{A}{r_n} \quad (4)$$

Applicando la formula (4) all'area piena A_p e vuota A_v , si ottiene

$$r_{n,p} = \frac{A_p}{\int_{A_p} \frac{dA_p}{r}} \Rightarrow \int_{A_p} \frac{dA_p}{r} = \frac{A_p}{r_{n,p}} ; r_{n,v} = \frac{A_v}{\int_{A_v} \frac{dA_v}{r}} \Rightarrow \int_{A_v} \frac{dA_v}{r} = \frac{A_v}{r_{n,v}} \quad (5)$$

Impiegando le relazioni precedenti (5), la formula (3) della valutazione del raggio dell'asse neutro r_n si semplifica nella espressione

$$r_n = \frac{A_p - A_v}{\frac{A_p}{r_{n,p}} - \frac{A_v}{r_{n,v}}} \quad (6)$$

La formula (6) mostra che il raggio dell'asse neutro r_n di una sezione composta può venire calcolato a partire dai raggi degli assi neutri $r_{n,p}$ e $r_{n,v}$ e dalle aree A_p e A_v delle sezioni piena e vuota.

Si considera nel seguito la valutazione del raggio baricentrico r_g di una sezione composta. Le sezioni piena e vuota possono venire immaginate come lamierini pesanti di spessore costante. L'equilibrio alla rotazione attorno all'asse che definisce il centro di curvatura delle forze peso produce la seguente formula

$$Ar_g = (A_p - A_v)r_g = A_p r_{g,p} - A_v r_{g,v} \quad (7)$$

dalla quale si deriva

$$r_g = \frac{A_p r_{g,p} - A_v r_{g,v}}{A_p - A_v} \quad (8)$$

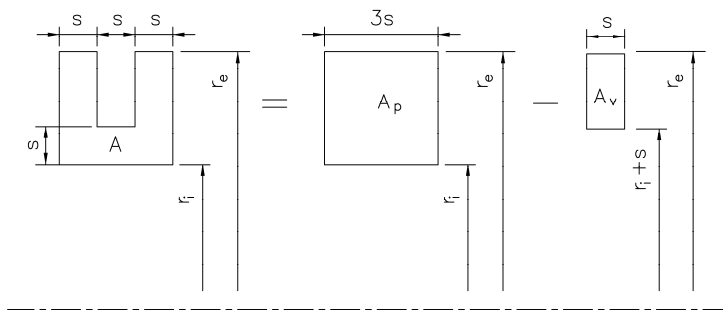


Figura 2

La formula (8) mostra che il raggio baricentrico r_g di una sezione composta può venire calcolato a partire dai raggi baricentrici $r_{g,p}$ e $r_{g,v}$ e dalle aree A_p e A_v delle sezioni piena e vuota.

Si considera nel seguito un esempio numerico, Figura 2. Si pone $s=10$ mm, $r_i=100$ mm,

$r_e=130$ mm. Si considera dapprima il calcolo di r_n . Relativamente alla sezione A_p , l'area A_p vale

$$A_p = (r_e - r_i) \times 3s = 30 \times 30 = 900 \text{ mm}^2$$

Il raggio dell'asse neutro $r_{n,p}$ della sezione A_p si calcola con la formula per le sezioni rettangolari

$$r_{n,p} = \frac{r_e - r_i}{\ln \frac{r_e}{r_i}} = \frac{30}{\ln \frac{130}{100}} = 114.3448 \text{ mm}$$

Il raggio baricentrico $r_{g,p}$ della sezione A_p , che è rettangolare, vale

$$r_{g,p} = \frac{r_i + r_e}{2} = 115 \text{ mm}$$

Passando alla sezione A_v , l'area A_v vale

$$A_v = (r_e - (r_i + s)) \times s = 20 \times 10 = 200 \text{ mm}^2$$

Il raggio dell'asse neutro $r_{n,v}$ della sezione A_v si calcola con la formula per le sezioni rettangolari

$$r_{n,v} = \frac{r_e - (r_i + s)}{\ln \frac{r_e}{r_i + s}} = \frac{20}{\ln \frac{130}{110}} = 119.7217 \text{ mm}$$

Il raggio baricentrico $r_{g,v}$ della sezione A_v , che è rettangolare, vale

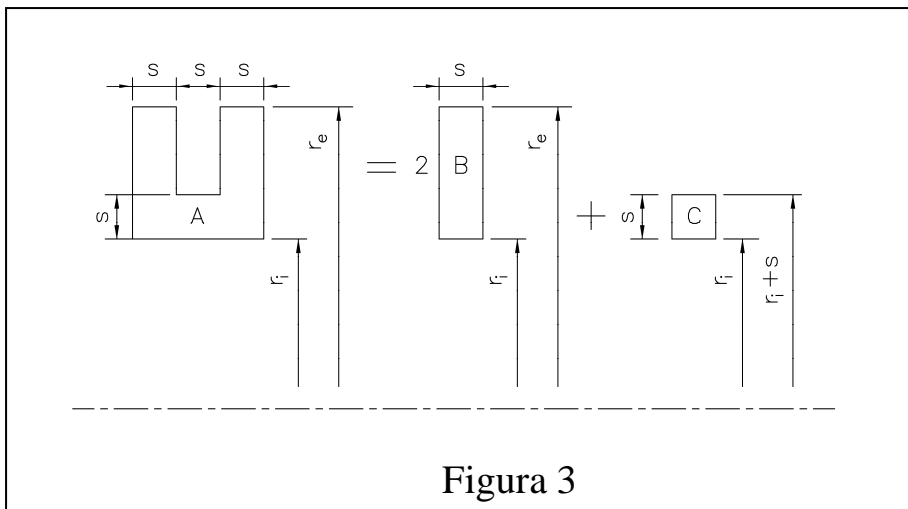
$$r_{g,v} = \frac{(r_i + s) + r_e}{2} = 120 \text{ mm}$$

Nel seguito si calcola r_n per la sezione composta A , a partire da A_p , $r_{n,p}$, A_v , $r_{n,v}$

$$r_n = \frac{A_p r_{g,p} - A_v r_{g,v}}{A_p - A_v} = \frac{900 \times 115 - 200 \times 120}{900 - 200} = 112.8961 \text{ mm}$$

Infine, si calcola r_g per la sezione composta A , a partire da A_p , $r_{g,p}$, A_v , $r_{g,v}$

$$r_g = \frac{A_p r_{g,p} - A_v r_{g,v}}{A_p - A_v} = \frac{900 \times 115 - 200 \times 120}{900 - 200} = 113.5714 \text{ mm}$$



Si riconsidera la sezione delle Figure 1 e 2, interpretandola però come sezione somma dei rettangoli mostrati in Figura 3, e cioè due volte la sezione B sommata alla sezione C . Si vuole calcolare r_n ed r_g per questa sezione composta interpretata come somma di

rettangoli.

Relativamente alla sezione B , l'area B vale

$$B = (r_e - r_i) \times s = 30 \times 10 = 300 \text{ mm}^2$$

Il raggio dell'asse neutro $r_{n,B}$ di ognuna delle due sezioni B si calcola con la formula per le sezioni rettangolari

$$r_{n,B} = \frac{r_e - r_i}{\ln \frac{r_e}{r_i}} = \frac{30}{\ln \frac{130}{100}} = 114.3448 \text{ mm}$$

Il raggio baricentrico $r_{g,B}$ di ognuna delle due sezioni B , che sono rettangolari, vale

$$r_{g,B} = \frac{r_i + r_e}{2} = 115 \text{ mm}$$

Passando alla sezione C , l'area C vale

$$C = ((r_i + s) - r_i) \times s = 10 \times 10 = 100 \text{ mm}^2$$

Il raggio dell'asse neutro $r_{n,C}$ della sezione C si calcola con la formula per le sezioni rettangolari

$$r_{n,C} = \frac{(r_i + s) - r_i}{\ln \frac{r_i + s}{r_i}} = \frac{10}{\ln \frac{110}{100}} = 104.9205 \text{ mm}$$

Il raggio baricentrico $r_{g,C}$ della sezione C , che è rettangolare, vale

$$r_{g,C} = \frac{(r_i + s) + r_i}{2} = 105 \text{ mm}$$

Nel seguito si calcola r_n per la sezione composta A , a partire da B , $r_{n,B}$, C , $r_{n,C}$

$$r_n = \frac{\frac{2 \times B + C}{r_{n,B}} + \frac{C}{r_{n,C}}}{\frac{2 \times 300 + 100}{114.3448} + \frac{100}{104.9205}} = 112.8961 \text{ mm}$$

Infine, si calcola r_g per la sezione composta A , a partire da B , $r_{g,B}$, C , $r_{g,C}$

$$r_g = \frac{2 \times B r_{g,B} + C r_{g,C}}{2 \times B + C} = \frac{2 \times 300 \times 115 + 100 \times 105}{2 \times 300 + 100} = 113.5714 \text{ mm}$$

I due metodi di scomposizione della sezione iniziale nella differenza, Figura 2, o somma, Figura 3, di forme più semplici producono gli stessi risultati in termini di raggio dell'asse neutro e raggio baricentrico.