Risposta dinamica di strutture elastiche

Enrico Bertocchi

May 21, 2012

1 Matrice di massa per l'elemento finito

Si considera un volume di materiale Ω, un sistema di coordinate globale (x, y, z) ed un sistema di coordinate locali (ξ, η, ζ), che può coincedere con il globale come caso particolare (vedi elementi triangolari 3 nodi).

Siano definite delle funzioni di forma *vettore*

$$\underline{N}_j\left(\xi,\eta,\zeta\right)=\left(\begin{array}{c} N_j^u\left(\xi,\eta,\zeta\right) \\ N_j^v\left(\xi,\eta,\zeta\right) \\ N_j^w\left(\xi,\eta,\zeta\right) \end{array}\right) \tag{1}$$

che leghino le componenti globali di spostamento al punto (ξ, η, ζ) ai gradi di libertà nodali δ_j.

La natura di tali $\underline{N}_j, \delta_j$ è propria dello specifico elemento; in particolare per un elemento isoparametrico piano 4 nodi, con nodi numerati (1,2,3,4) si ha:

$$\begin{array}{lll} \delta_1 = u_1, & N_1^u = \frac{1}{4}\left(1-\xi\right)\left(1-\eta\right), & N_1^v = N_1^w = 0 \\ \delta_2 = v_1, & N_2^v = \frac{1}{4}\left(1-\xi\right)\left(1-\eta\right), & N_2^u = N_2^w = 0 \\ \delta_3 = u_2, & N_3^u = \frac{1}{4}\left(1+\xi\right)\left(1-\eta\right), & N_3^v = N_3^w = 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{array} \tag{2}$$

Il campo degli spostamenti $\underline{\delta}^*(\xi, \eta, \zeta)$ è rappresentabile nella forma

$$\underline{\delta}^*(\xi,\eta,\zeta) = \underline{\underline{N}}\left(\xi,\eta,\zeta\right)\underline{\delta}, \tag{3}$$

ove

$$\underline{\underline{N}} = \left[\begin{array}{ccccc} N_1^u\left(\xi,\eta,\zeta\right) & \cdots & N_j^u\left(\xi,\eta,\zeta\right) & \cdots & N_n^u\left(\xi,\eta,\zeta\right) \\ N_1^v\left(\xi,\eta,\zeta\right) & \cdots & N_j^v\left(\xi,\eta,\zeta\right) & \cdots & N_n^v\left(\xi,\eta,\zeta\right) \\ N_1^w\left(\xi,\eta,\zeta\right) & \cdots & N_j^w\left(\xi,\eta,\zeta\right) & \cdots & N_n^w\left(\xi,\eta,\zeta\right) \end{array}\right] \tag{4}$$

è una matrice $3 \times n$, con n numero di gradi di libertà nodali totali sull'elemento, e

$$\underline{\delta} = \left[\delta_1 \cdots \delta_j \cdots \delta_n\right]^T, \tag{5}$$

è il vettore contenente tali gg.d.l. .

Non essendo tali funzioni di forma dipendenti dalla variabile tempo t, si ha che se il campo delle velocità è rappresentabile semplicemente come

$$\underline{v}(\xi,\eta,\zeta) = \underline{\dot{\delta}}^*(\xi,\eta,\zeta) = \underline{\underline{N}}\,\underline{\dot{\delta}} \tag{6}$$

ove $\underline{\dot{\delta}}$ è il vettore delle velocità nodali, contenente le derivate nel tempo dei valori di spostamento ai vari gg.d.l.

Considerata l'energia cinetica propria del materiale compreso entro l'elemento nella forma

$$E_{cin} = \frac{1}{2}\int_{\Omega} \left[\underline{v}\left(\xi,\eta,\zeta\right)\right]^{T} \left[\underline{v}\left(\xi,\eta,\zeta\right)\right] \ \rho \ d\Omega, \tag{7}$$

ove ρ è la densità puntuale del materiale, è possibile ivi sostiture la forma generica della velocità puntuale con la definizione della stessa in 6, ottenendo

$$E_{cin} = \frac{1}{2}\int_{\Omega} \left[\underline{\underline{N}}\dot{\underline{\delta}}\right]^{T} \left[\underline{\underline{N}}\dot{\underline{\delta}}\right] \ \rho \ d\Omega. \tag{8}$$

Ricordando infine che $\dot{\delta}$ non varia nelle variabili di integrazione, otteniamo la forma

$$E_{cin} = \frac{1}{2}\dot{\underline{\delta}}^{T} \left[\int_{\Omega} \underline{\underline{N}}^{T}\underline{\underline{N}} \ \rho \ d\Omega,\right] \dot{\underline{\delta}} = \frac{1}{2}\dot{\underline{\delta}}^{T}\underline{\underline{M}}\dot{\underline{\delta}} \tag{9}$$

da cui è possibile ottenere la definizione di una matrice $\underline{\underline{M}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ detta *matrice di massa congruente* per l'elemento.

L'integrazione entro 9 può essere condotta per quadratura gaussiana, in analogia con la definizione di matrice di rigidezza; in particolare si può scrivere

$$\underline{\underline{M}} = \iiint \left[\underline{\underline{N}}\left(\xi,\eta,\zeta\right)\right]^{T} \left[\underline{\underline{N}}\left(\xi,\eta,\zeta\right)\right] \ \rho \ \det\left(\underline{\underline{J}}\left(\xi,\eta,\zeta\right)\right) d\xi d\eta d\zeta, \tag{10}$$

ove $\underline{\underline{J}}\left(\xi,\eta,\zeta\right)$ è lo Jacobiano della mappatura $(\xi,\eta,\zeta) \rightarrow (x,y,z)$.

Eguagliando infine la variazione di energia cinetica [1]

$$\begin{aligned}
\frac{dE_{cin}}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\underline{\delta}}^{T}\underline{\underline{M}}\dot{\underline{\delta}}\right) && (11)\\
&= \frac{1}{2}\left(\ddot{\underline{\delta}}^{T}\underline{\underline{M}}\dot{\underline{\delta}} + \dot{\underline{\delta}}^{T}\underline{\underline{M}}\ddot{\underline{\delta}}\right) && (12)\\
&= \frac{1}{2}\left(\left[\ddot{\underline{\delta}}^{T}\underline{\underline{M}}\dot{\underline{\delta}}\right]^{T} + \dot{\underline{\delta}}^{T}\underline{\underline{M}}\ddot{\underline{\delta}}\right) && (13)\\
&= \dot{\underline{\delta}}^{T}\underline{\underline{M}}\ddot{\underline{\delta}} && (14)\\
& && (15)
\end{aligned}$$

alla potenza fornita da un sistema di forze esterne $\underline{F}_{iner}$ agenti sui nodi dell'elemento (tali forze equilibrano sul nodo le reazioni inerziali, e quindi sono ad esse uguali e contrarie)

$$\dot{\underline{\delta}}^{T}\underline{F}_{iner} \tag{16}$$

otteniamo la relazione

$$\underline{F}_{iner} = \underline{\underline{M}}\ddot{\underline{\delta}} \tag{17}$$

che lega le forze da applicare all'elemento affinché questo acceleri con determinate accelerazioni nodali (derivate seconde nel tempo degli spostamenti ai vari gg.d.l).

[1] ricordiamo che $\underline{\underline{M}}$ risulta simmetrica e viene supposta costante nel tempo